ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Introduction au calcul des variations

Analyse de l'intégrale de Dirichlet

David Pham

22 mars 2010

Professeur : Bernard Dacorogna
Assistant : Gyula Csató

Résumé

Après un rappel d'analyse fonctionnelle, et de quelques résultats sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev, nous étudierons un des problèmes les plus connus du calcul des variations, l'intégrale Dirichlet. Nous montrerons l'existence et l'unicité de la solution dans différents espaces de fonctions et finalement, nous procéderons à une brève analyse de la régularité des solutions.

Table des matières

Introduction

Le calcul des variations est l'une des branches classiques des mathématiques. De nombreux mathématiciens exceptionnels, tels qu'Euler, Lagrange ou Hilbert pour ne citer que les plus célèbres, ont contribué à son développement. Le calcul des variations peut se révéler utile à la physique, à l'ingénierie, à la biologie ou encore à l'économie, mais bien naturellement aussi à d'autres branches des mathématiques telles que la géométrie ou bien l'étude des équations différentielles.

Le problème principal en calcul des variations s'énonce ainsi. On désire minimiser une intégrale $I(u)$ parmi toutes les fonctions u dans un certain espace de fonction X. En d'autres mots, nous cherchons $\overline{u} \in X$ tel que

$$(Q) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega g(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in X \right\} = m = I(\overline{u}),$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ est un ouvert borné, et un point d'Ω est noté $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$, où $N \geq 1$ et $u = (u^1, \ldots, u^N)$, et par conséquent

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n}.$$

  Notons que nous nous sommes restreint à l'étude du cas monodimensionnel, c'est-à-dire où $N = 1$.
- $g \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, et g est continue.
- X est un espace admissible de fonctions. Par exemple $X = C^1(\Omega)$ avec $u = u_0$ sur $\partial\Omega$.

Nous aimerions donc trouver un *minimiseur* $\overline{u} \in X$ de (Q), signifiant donc

$$I(\overline{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in X.$$

L'un des exemples les plus connus du calculs des variations est le problème de l'intégrale de Dirichlet que nous étudierons en détails par la suite. Nous avons ici $n \geq 1$ et $N = 1$ et

$$(D) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \nabla u(x) \right|^2 dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Une question naturelle à se poser est de choisir l'espace des fonctions admissibles. Au premier abord, on pourrait choisir l'ensemble $C^1(\overline{\Omega})$ des fonctions continûment dérivables. Néanmoins nous montrerons que ce n'est pas le meilleur espace pour l'objet de nos études car cet espace est très restrictif. *A contrario* les espaces de Sobolev, que l'on note communément $W^{1,p}(\Omega)$ et que nous définirons dans le premier chapitre, nous donnent une plus grande liberté.

Comme dit précédement, le calcul des variations possède un lien avec les équations différentielles et c'est d'ailleurs sur ce dernier thème que porte la majorité de ce document. Nous allons en effet tenter de résoudre certaines équations aux dérivées partielles grâce au calcul des variations.

Dans ce but, l'équation d'*Euler-Lagrange* est un puissant outil. Comme nous le montrerons au deuxième chapitre, cette équation est au calcul des variations ce que l'équation $F'(x) = 0$ est pour la minimisation d'une fonction F dans le cas de dimension finie. En effet, dans le cas où $N = 1$, si $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ est un minimiseur de (Q) alors elle doit vérifier l'équation

$$(E) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, \overline{u}(x), \nabla \overline{u}(x)) \right] = \frac{\partial g}{\partial u}(x, \overline{u}(x)(, \nabla \overline{u}(x)), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

où ξ dénote la troisième variable de g. Dans le cas de l'intégrale de Dirichlet, l'équation d'*Euler-Lagrange* se traduit par rien d'autre que *l'équation de Laplace*, *i.e.* $\Delta u = 0$.

On peut se poser la question sur la nature des solutions obtenues. En effet nous étudions un problème consistant à minimiser une intégrale, ce qui au premier abord ne nous garantit aucune régularité sur les minimiseurs. Néanmoins, nous verrons qu'en fonction de l'intégrant g et de la régularité des conditions initiales, on peut montrer que les minimiseurs obtenus sont plus réguliers que simplement $W^{1,p}(\Omega)$.

Nous commencerons tout d'abord à étudier certains résultats élémentaires d'analyse. En particulier, nous énoncerons et démontrerons le théorème de Lax-Milgram, qui est aussi un résultat élémentaire du calcul des variations. De plus nous introduirons brièvement les espaces de Sobolev. Puis, nous nous intéresserons principalement à la résolution du problème

$$(P) \qquad I(\overline{u}) = \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,p}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p - fu \, dx \right\} = m.$$

Finalement, nous étudierons la régularité intérieur des solutions que nous aurons établies.

Nous nous sommes principalement inspiré de l'excellent livre de Dacorogna [1], dont nous remercions l'auteur de nous avoir donné la chance d'étudier ce passionnant sujet. Nous tenons également à remercier Gyula Csató pour ses excellents conseils, ses suggestions et son enseignement.

Chapitre 1

Préliminaires

On s'attellera dans ce chapitre à rappeler certains résultats élémentaires et à fixer les notations.

1.1 Analyse Fonctionnelle

On présentera dans cette section la démonstration du théorème de Lax-Milgram, démonstration dont on généralisera la méthode dans les chapitres suivants. On parlera également de la notion de convergence faible.

Définition 1.1 (Espace Dual)**.** Soit E un espace vectoriel normé.

i) On appelle le dual de E que l'on note $(E)'$, l'ensemble des fonctions linéaires et continues de E vers $\mathbb{R}$. On munit le dual $(E)'$ de la norme suivante

$$\|f\|_{(E)'} = \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \le 1} |f(x)|\,.$$

ii) Le bidual de E est représenté par $(E)''$.

iii) On dit que l'espace E est réflexif si E est isomorphe à son bidual.

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de Banach. On dit qu'une fonction $b\colon E\times E \to \mathbb{R}$ est

(i) bilinéaire si $\forall u, v, x, y \in E$ et $\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} b(\alpha_1 u + \alpha_2 v, \beta_1 x + \beta_2 y) &= \alpha_1\beta_1 b(u, x) + \alpha_1\beta_2 b(u, y) \\ &\quad + \alpha_2\beta_1 b(v, x) + \alpha_2\beta_2 b(v, y). \end{aligned}$$

(ii) symétrique si $\forall u, v \in E$, l'égalité $b(u, v) = b(v, u)$ se tient.

(iii) coercive si $\forall u \in E$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$b(x, x) \ge \alpha \|x\|^2\,.$$

Théorème 1.3 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de Banach, $(E)'$ le dual de E, F un élément de $(E)'$, et b une forme bilinéaire, symétrique, coercive et continue. Alors il existe un unique x_0 dans E, tel que*

$$F(y) = b(y, x_0) \quad \forall y \in E.$$

Démonstration. On procède en deux étapes.

Unicité de x_0 Supposons d'abord qu'il existe $x_0 \in E$ avec la propriété recherchée. Et supposons qu'il ne soit pas unique, *i.e.* qu'il existe $y_0 \in E$ avec $F(y) = b(y, y_0)$ pour tout $y \in E$. En particulier en considérant $y = x_0 - y_0$ on a

$$b(x_0 - y_0, x_0) = F(x_0 - y_0) = b(x_0 - y_0, y_0).$$

En soustrayant le terme de droite avec celui de gauche et en utilisant la coercivité de b, il résulte

$$0 = b(x_0 - y_0, x_0 - y_0) \geq \alpha \|x_0 - y_0\|^2 \geq 0.$$

Ceci implique donc que $x_0 = y_0$ par la propriété de la norme.

Existence de x_0 Pour démontrer l'existence d'un tel $x_0 \in E$, nous minimiserons la fonction

$$A(x) = \frac{1}{2} b(x, x) - F(x) \text{ sur } E.$$

Montrons tout d'abord que

$$\inf_{x \in E} A(x) = M > -\infty.$$

On remarque d'abord que puisque la fonction linéaire F est continue, elle est en particulier bornée au sens suivant. Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$|F(x)| \leq K \|x\|.$$

Ainsi par définition de A, par coercivité de b, on obtient que

$$A(x) = \frac{1}{2} b(x, x) - F(x) \geq \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 - K \|x\|$$

avec $\alpha > 0$. L'expression obtenue étant quadratique en $\|x\|$, la fonction $A(x)$ atteint donc un minimum. Ainsi

$$M := \inf_{x \in E} A(x) > -\infty.$$

Soit x_n une suite minimisante tel que $A(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} M$. On montrera que x_n est une suite de Cauchy et donc convergente dans E, puisque E est complet par hypothèse. Tout d'abord remarquons que

$$\frac{A(x_n)}{2} = \frac{1}{4} b(x_n, x_n) - \frac{1}{2} F(x_n).$$

Par définition de M, nous avons que

$$\begin{aligned}
M &\leq A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) = \frac{1}{2} b\left(\frac{x_n + x_m}{2}, \frac{x_n + x_m}{2}\right) - F\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} b(x_n, x_n) - \frac{1}{2} F(x_n) + \frac{1}{8} b(x_m, x_m) - \frac{1}{2} F(x_m) + \frac{2}{8} b(x_n, x_m) \\
&= \frac{A(x_n)}{2} - \frac{1}{8} b(x_n, x_n) + \frac{A(x_m)}{2} - \frac{1}{8} b(x_m, x_m) + \frac{2}{8} b(x_n, x_m) \\
&= \frac{A(x_n)}{2} + \frac{A(x_m)}{2} - \frac{1}{8} b(x_n - x_m, x_n - x_m)
\end{aligned}$$

En utilisant la coercivité de b on peut conclure

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \frac{8}{\alpha} b(x_n - x_m, x_n - x_m) \leq \frac{8}{\alpha} \left(-M + \frac{A(x_n)}{2} + \frac{A(x_m)}{2}\right) \to 0,$$

si $n, m \to \infty$, puisque $A(x_n) \to M$ par construction et M est fini. Ainsi x_n est une suite de Cauchy, et puisque l'espace E est de Banach, elle converge dans E. On appelle alors x_0 la limite de la suite x_n, et on peut écrire

$$M := \min_{x \in E}\{A(x)\} = A(x_0).$$

On définit maintenant la fonction $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = A(x_0 + ty)$$

avec $y \in E$ quelconque. Cette fonction g est ainsi différentiable. En effet, en utilisant la linéarité de F et la bilinéarité de b, on a

$$\begin{aligned} g(t) &\overset{\text{def.}}{=} A(x_0 + ty) = \frac{1}{2}b(x_0 + ty, x_0 + ty) - F(x_0 + ty) \\ &= \frac{1}{2}b(x_0, x_0) + tb(x_0, y) + \frac{t^2}{2}b(y, y) - F(x_0) - tF(y) \\ &= A(x_0) + t(b(x_0, y) - F(y)) + \frac{t^2}{2}b(y, y) \\ &= g(0) + t(b(x_0, y) - F(y)) + \frac{t^2}{2}b(y, y) \end{aligned}$$

On remarque de plus que

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 b(y, y)}{2t} = 0$$

Ce qui montre bien que g est différentiable. De plus puisque $A(x_0)$ est un minimum, alors par un résultat classique d'analyse on a que $g'(0) = 0$. Or on a également

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} b(x_0, y) - F(y) + \frac{t}{2}b(y, y) = b(x_0, y) - F(y) = 0$$

Ce qui, en ajoutant $F(y)$ d'une part et d'autre de l'égalité, prouve le théorème. □

Théorème 1.4 (Théorème de Représentation de Riesz)**.** *Soit H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel hilbertien. Alors pour toute fonction φ dans l'espace dual $(H)'$ de H, il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

De plus

$$\|\varphi\|_{(H)'} = \|y\|_H .$$

Démonstration. Nous montrons que l'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, ce qui nous donnera immédiatement le résultat voulu.

(i) En posant $E = H$, on a, puisque l'espace H est hilbertien, que E est de Banach, par définition.

(ii) La fonction $F = \varphi$ appartenant au dual de H, on a donc que $F = \varphi$ est continue et linéaire, et prend des valeurs sur $\mathbb{R}$.

(iii) Nous avons finalement que $b = \langle \cdot ; \cdot \rangle$, c'est-à-dire que l'application b du théorème de Lax-Milgram est le produit scalaire de H. Par définition du produit scalaire, b est symétrique, et bilinéaire. Il reste à montrer que b est coercive et continue.

L'application b est coercive. En effet, on a pour tout $x \in H$ et tout constante $\alpha \in (0;1)$,

$$b(x,x) = \langle x;x \rangle = \|x\|^2 \geq \alpha \|x\|^2 .$$

Ainsi on peut prendre toute constante entre 0 et 1 comme constante de coercivité. En ce qui concerne la continuité de b, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour établir que pour tout $x, y \in H$ on a

$$|\langle x;y \rangle| \leq \|x\| \|y\| .$$

Ainsi en appliquant le théorème de Lax-Milgram dont on vient de vérifier les hypothèses, on en déduit la première partie du théorème.

Pour la deuxième partie du théorème, on remarque d'une part que

$$\|\varphi\|_{(H)'} = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x;y \rangle| \geq \left\langle \frac{y}{\|y\|_H};y \right\rangle = \|y\|_H ,$$

et d'autre part, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\varphi\|_{(H)'} = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x;y \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|_H \|y\|_H = \|y\|_H ,$$

ce qui montre que $\|\varphi\|_{(H)'} = \|y\|_H$. □

Définition 1.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(i) On dit qu'une suite u_n *converge* (fortement) vers u dans E si $u_n, u \in E$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

On note cette convergence par $u_n \to u$ dans E.

(ii) Nous disons qu'une suite u_n *converge faiblement* vers u dans E si $u_n, u \in E$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \varphi(u), \quad \forall \varphi \in (E)'.$$

Nous notons cette convergence par $u_n \rightharpoonup u$ dans E.

Exemple 1.6. Nous allons donner un exemple d'une suite qui converge faiblement mais qui ne converge pas fortement. Soit $E = \ell^2$, l'espace défini par

$$\ell^2 \quad = \quad \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty\}.$$

Cet espace est équipé de la norme induite par le produit scalaire suivant : si $x, y \in \ell^2$ alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j.$$

Pour le besoin de cet exemple, on utlisera la notation suivante. On notera une suite dans ℓ^2 par $x^{(n)}$, et $x_j^{(n)}$ sera la $j^{ième}$ valeur de la suite $x^{(n)}$. Soit la suite $e^{(n)}$ dans ℓ^2 définie par

$$e_i^{(n)} = \delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au théorème de représentation de Riesz, on sait que pour tout $\varphi \in (\ell^2)'$, il existe $y \in \ell^2$ tel que

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i, \quad \forall x \in \ell^2.$$

Ainsi, soit $\varphi \in (\ell^2)'$ quelconque et $y = y(\varphi) \in \ell^2$ donné par le théorème de représentation de Riesz. On obtient ainsi

$$\varphi(e^{(n)}) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^{(n)} y_i = y_n \to 0.$$

En effet, y_n converge vers zero, car $y \in \ell^2$. Il est évident que $e^{(n)}$ ne converge pas fortement, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left\|e^{(n)}\right\| = 1$.

Le théorème suivant est très intéressant. On sait que dans $\mathbb{R}^n$, toute suite borné admet une sous-suite convergeant fortement. Mais cela est faux en général si l'on considère des espaces différents (comme par exemple de espaces de dimension infini). Mais cela reste vrai si l'espace est réflexif et si l'on remplace la convergence par la convergence faible.

Théorème 1.7. *Soit E un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire E est de Banach, et réflexif. Si u_n une suite dans E et une constante $M > 0$ telle que $\|u_n\|_E < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite u_{n_i} de u_n et u dans $(E)'$, tel que*

$$u_{n_i} \rightharpoonup u \quad \textit{dans } E.$$

Démonstration. Le lecteur intéressé trouvera une preuve dans Brezis [2], théorème III.27. □

1.2 Les Espaces de Lebesgue

Définition 1.8. (i) On dit qu'une propriété a lieu *presque partout*, abrégé *p.p.*, si elle a lieu partout, sauf sur un ensemble de mesure nul.

(ii) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On définit le *support* de la fonction $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

(iii) Si $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u = (u^1, \ldots, u^n)$, on notera les dérivées partielles de u par l'une ou l'autre façons :

$$D_j u = u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}).$$

(iv) La notation pour les dérivées supérieures s'écrira ainsi. Soit $k \geq 1$ un entier. Un élément α de

$$\mathcal{A}_k = \left\{ a = (a_1, \ldots a_n), a_j \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_j = k \right\}$$

est appelé un multi-indice d'ordre de k. On écrira souvent pour désigner l'ordre de α

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k.$$

On écrit par ailleurs

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On écrira également $\nabla^k u = (D^\alpha u)_{\alpha \in \mathcal{A}_k}$. En d'autres termes, $\nabla^k u$ contient toutes les dérivées partielles d'ordre k d'une fonction u.

(v) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On note $C_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω. C'est-à-dire $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $C_0^\infty(\Omega)$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_k$ on a

$$D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ et supp } u \subset \Omega \text{ est compact.}$$

Définition 1.9. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction mesurable $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p(\Omega)$ si

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{\alpha : |u(x)| \leq \alpha \text{ p.p. dans } \Omega\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

est finie. Si $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$, $u = (u^1, \dots, u^N)$, est tel que $u^i \in L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, N$, on écrit $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Proposition 1.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in L^1(\Omega)$ tel que $f \geq 0$. Nous avons alors*

$$\int_\Omega f(x) \ dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p. .}$$

Voici quelques caractéristiques des espaces $L^p(\Omega)$ qui nous seront très utile par la suite.

Théorème 1.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. On définit p' comme étant le nombre respectant l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ou de manière équivalente $p' = \frac{p}{1-p}$. On alors les propriétés suivantes.*

(i) $\|\cdot\|_{L^p}$ *est une norme et $L^p(\Omega)$ équipé de cette norme est un espace de Banach. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace hilbértien dont le produit scalaire est*

$$\langle u; v \rangle = \int_\Omega u(x) v(x) \ dx.$$

*(ii) L'**inégalité de Hölder** prétend que si $u \in L^p(\Omega)$, et $v \in L^{p'}(\Omega)$ alors $uv \in L^1(\Omega)$. Plus précisément on a*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}.$$

*(iii) L'**inégalité de Minkowski** assure que si $u, v \in L^p(\Omega)$, alors*

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

(iv) L^p *est séparable si* $1 \leq p < \infty$ *et réflexif* $1 < p < \infty$.

(v) L'espace dual de L^p*, noté* $(L^p)'$ *peut être identifié à* $L^{p'}$*, en supposant que* $1 \leq p < \infty$. *Plus précisément, si* $\varphi \in (L^p)'$ *alors il existe un unique* $u \in L^{p'}$ *tel que*

$$\langle \varphi; f \rangle = \varphi(f) = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \quad f \in L^p(\Omega)$$

et de plus

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'} .$$

Bien que la notion de convergence ait été définie auparavant dans le cadre générale, nous la précisons dans le cas particulier où les espaces vectoriels sont les espaces $L^p(\Omega)$. On utilise pour cela le dernier point du dernier théorème qui identifie les éléments du dual d'un espace $L^p(\Omega)$ avec les éléments de $L^{p'}(\Omega)$.

Définition 1.12 (Convergence faible)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une suite u_n *converge* (fortement) vers u dans $L^p(\Omega)$ si $u_n, u \in L^p(\Omega)$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

On note cette convergence par $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$.

(ii) Si $1 \leq p < \infty$, nous disons qu'une suite u_n *converge faiblement* vers u dans L^p si $u_n, u \in L^p$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Nous notons cette convergence par $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$.

(iii) Si $p = \infty$, nous disons qu'une suite u_n *converge faiblement* $*$ vers u dans L^∞ si $u_n, u \in L^\infty$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in L^1(\Omega).$$

Nous notons cette convergence par $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Remarque 1.13. Soit u_n une suite de fonction dans $L^p(\Omega)$. En invoquant le théorème 1.7 appliqué à $L^p(\Omega)$, qui est réflexif, on peut affirmer que pour toute suite u_n borné, c'est-à-dire $\sup_n \|u_n\|_{L^p} < \infty$, il existe une sous-suite u_{n_i} et u dans $L^p(\Omega)$ tel que

$$u_{n_i} \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Théorème 1.14. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, et* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *alors*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} .$$

Démonstration. On utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\left| \|u\|_{L^2(\Omega)} - \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|u - u_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

car $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$. □

Lemme 1.15. *Soit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Si une suite* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *et une suite* $g_n \to g$ *dans* $L^{p'}(\Omega)$*, alors*

$$\int_\Omega f_n g_n \, dx \to \int_\Omega fg \, dx \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f_n g_n - fg \; dx\right| &\leq \left|\int_\Omega f_n g_n - f_n g + f_n g - fg \; dx\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega f_n g_n - f_n g \; dx\right| + \left|\int_\Omega f_n g - fg \; dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega f_n (g_n - g) \; dx\right| + \left|\int_\Omega (f_n - f) g \; dx\right| \\
&\leq \|f_n\|_{L^p} \|g_n - g\|_{L^{p'}} + \left|\int_\Omega (f_n - f) g \; dx\right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

En effet par l'inégalité d'Hölder, on a

$$\left|\int_\Omega f_n (g_n - g) \; dx\right| \leq \|f_n\|_{L^p} \|g_n - g\|_{L^{p'}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $g_n \to g$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Et par définition de la convergence faible pour f et du fait que $g \in L^{p'}(\Omega)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_\Omega (f_n - f) g \; dx\right| = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 1.16. Il est en général faux d'affirmer que si une suite $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ et une suite $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^{p'}(\Omega)$, alors $f_n g_n \rightharpoonup fg$ dans $L^1(\Omega)$. En effet soit $p = p' = 2$, $\Omega = (0, 2\pi)$ et

$$f_n(x) = g_n(x) = \sin(nx).$$

Alors $f_n, g_n \rightharpoonup 0$ dans $L^1(\Omega)$. En effet, soit $\varphi \in C_0^\infty(0, 2\pi)$ quelconque, alors par intégration par partie on obtient

$$\left|\int_0^{2\pi} \sin(nx)\varphi(x)dx\right| = \left|\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\varphi'(x)dx\right| \leq \frac{C}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

où $C > 0$.

Mais $f_n g_n = \sin^2(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0$ dans $L^1(\Omega)$. En effet comme $\sin^2(nx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2nx))$ et que par conséquent en effectuant le même calcul qu'au dessus on obtient que $\cos(2nx) \rightharpoonup 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varphi(x)}{2} - \frac{\cos(2nx)\varphi(x)}{2}\right) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{2} dx.$$

Néanmoins le résultat devient vrai si l'on remplace les convergences faibles par des convergences fortes. En effet, soit $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g \in L^{p'}(\Omega)$ alors

$$f_n g_n \to fg \text{ dans } L^p(\Omega)$$

En effet nous avons

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\| &= \int_\Omega |f_n g_n - fg|\,dx \leq \int_\Omega |f_n(g_n - g)| + |g(f_n - f)|\,dx \\ &\overset{Hölder}{\leq} \|f_n\|_{L^p}\,\|g_n - g\|_{L^{p'}} + \|g\|_{L^{p'}}\,\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

La définition suivante sera capitale pour la définition des espaces de Sobolev.

Définition 1.17. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$. On dit que $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega')$ pour tout ensemble ouvert Ω' contenu de manière compacte dans Ω, c'est-à-dire $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Le prochain théorème est abondamment utilisé par la suite.

Théorème 1.18 (Lemme fondamental du calcul des variations)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On a alors que $u = 0$, presque partout dans Ω.

1.3 Les Espaces de Sobolev

On étudiera dans cette section quelques notions des espaces de Sobolev.

Définition 1.19. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est *la dérivée partielle faible* de u par rapport x_i si

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx\ , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par abus de notation on notera $v = \partial u/\partial x_i$, ou bien encore u_{xi}.

On dit que u est faiblement différentiable si les dérivées faibles $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ existent.

On généralise cette définition aux dérivées d'ordre supérieur. Plus précisément, si $k \geq 1$, on dit que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si pour tout multi-indice α d'ordre inférieur ou égale k nous avons

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}(x)\,dx$$

Remarque 1.20. Grâce au lemme fondamental du calcul des variations, on peut affirmer que les dérivées faibles, si elles existent, coïncident presque partout. En effet, supposons que $v, w \in L^p(\Omega)$ des candidats pour être la dérivée faible de u par rapport x_i. Si, de plus, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quelconque, nous avons alors par définition que

$$\int_\Omega (v-w)\varphi\,dx = \int_\Omega v\varphi\,dx - \int_\Omega w\varphi\,dx = -\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx + \int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = 0.$$

Le lemme fondamental du calcul des variations nous affirme alors que

$$v = w \quad p.p.\,,$$

impliquant, puisque nous ne faisons pas la différence entre deux fonctions coïncidant presque partout, que $v = w$.

Définition 1.21. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$.

(i) On définit *les espaces de Sobolev* de la manière suivante. Si $k > 0$ est un entier naturel, on laisse $W^{k,p}(\Omega)$ être l'ensemble de fonctions $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, dont les dérivées faibles $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout multi-indices $\alpha \in \mathcal{A}_m$ avec $0 \leq m \leq k$. La norme est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

(ii) En particulier si on s'intéresse au cas où $k = 1$, on obtient que $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$, dont les dérivées partielles faible $u_{x_i} \in L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On dote cet espace de la norme suivante

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} &= \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{1,\infty}} &= \max\{\|u\|_{L^\infty}, \|\nabla u\|_{L^\infty}\} \qquad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

On remarque au vu du point (i), en posant $k = 1$, que $\|\nabla u\|_{L^p}^p = \sum_{i=1}^n \|\partial u/\partial x_i\|_{L^p}^p$.

(iii) Si $1 \leq p < \infty$, l'ensemble $W_0^{1,p}(\Omega)$ est définit comme la fermeture des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Par abus de language, on dit, si Ω est bornée, que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est tel que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

(iv) On écrit aussi $u \in u_o + W_0^{1,p}(\Omega)$ pour dire que $u, u_0 \in W^{1,p}$ et $u - u_0 \in W^{1,p}$.

(v) On définit $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ comme étant l'ensemble des applications $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $u = (u^1, \ldots, u^N)$, avec $u^i \in W^{k,p}(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. Idem pour $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Voici un résultat très intéressant qui utilise le fait que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.22. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ où $1/p+1/p' = 1$ et $p > 1$. Alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx\,, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Démonstration. Soit i fixé. L'égalité à montrer s'écrit également de la manière suivante

$$\int_\Omega u_{x_i}\varphi + u\varphi_{x_i}\, dx = 0.$$

Puisque $W_0^{1,p'}(\Omega)$ est la fermeture des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p'}(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,p'}(\Omega)$, il existe une fonction $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|\varphi - \psi\|_{L^{p'}} + \|\nabla\varphi - \nabla\psi\|_{L^{p'}} \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|u\|_{W^{1,p}}}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé. Par définition de la dérivée faible dans le sens de Sobolev nous avons

$$\int_\Omega u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i}\, dx = 0.$$

Nous obtenons par conséquent

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u_{x_i}\varphi + u\varphi_{x_i}\,dx &= \int\limits_\Omega u_{x_i}\varphi - u_{x_i}\psi \underbrace{+u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i}}_{=0} - u\psi_{x_i} + u\varphi_{x_i}\,dx \\ &= \int\limits_\Omega u_{x_i}(\varphi-\psi) + u(\psi_{x_i} - \varphi_{x_i})dx.\end{aligned}$$

En utilisant alors l'inégalité de Hölder et la définition de ψ nous obtenons

$$\int\limits_\Omega u_{x_i}\varphi + u\varphi_{x_i}\,dx \leq \|u_{x_i}\|_{L^p}\|\varphi-\psi\|_{L^{p'}} + \|u\|_{L^p}\|\psi_{x_i}-\varphi_{x_i}\|_{L^{p'}} \leq \varepsilon.$$

Puisque l'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $i = 1, \dots, n$, nous pouvons affirmer que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx\,,\ i = 1, \dots, n.$$

□

Voici quelques résultats préliminaires sur les espaces $W^{k,p}(\Omega)$, qui découlent de ceux des espaces $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.23. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $k \geq 1$.*

(i) Si $1 < p < \infty$, les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont réflexifs.

(ii) Si $1 \leq p < \infty$, les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont alors séparables.

(iii) Si $1 \leq p < \infty$, les fonctions qui sont à la fois $C^\infty(\Omega)$ et $W^{k,p}(\Omega)$ sont dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Théorème 1.24 (Complétude de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_{1,p}$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit une suite de Cauchy u_n dans $W^{1,p}(\Omega)$. Montrons tout d'abord que chaque dérivée de la suite u_n converge dans $W^{1,p}(\Omega)$. Au vu de la définition de la norme dans $W^{1,p}(\Omega)$, cela revient à montrer que les suites de Cauchy $D^\alpha u_n$ converge dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice α tel que $0 \leq |\alpha| \leq 1$.

Puisque $L^p(\Omega)$ est complet, chacune des suites $D^\alpha u_n$ avec $0 \leq |\alpha| \leq 1$ converge vers un élément $u^\alpha \in L^p(\Omega)$. On appelle u la fonction telle que $u_n \to u \in L^p(\Omega)$. Il reste maintenant à prouver que u a des dérivées faible et que pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n = u^\alpha = D^\alpha u.$$

Remarquons tout d'abord que si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on peut vérifier au moyen de l'inégalité de Hölder que

$$\int_\Omega v_n\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega v\varphi\,dx.$$

Finalement, soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. On obtient, en se rappelant que les u_n appartiennent à $W^{1,p}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^\alpha\varphi\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega D^\alpha u_n\varphi\,dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n D^\alpha\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = \int_\Omega D^\alpha u\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Ainsi puisque la dérivée faible est unique presque partout, on a $u^\alpha = D^\alpha u$ presque partout et pour tout multi-indice α de norme 1. On obtient donc que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{L^p} \to 0 \quad \forall 0 \leq |\alpha| \leq 1.$$

Ce qui implique que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. □

Nous utiliserons constamment la proposition suivante lors des chapitres suivants. Cette proposition découle du théorème 1.7 appliqué aux espaces $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.25. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et u_n une suite de fonction dans $W^{1,p}(\Omega)$. S'il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

alors il existe une sous-suite u_{n_k} de u_n qui converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire il existe u tel que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{ et } \quad \nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que que les suites u_n et ∇u_n sont bornée dans $L^p(\Omega)$. En effet on a

$$\|u_n\|_{L^p} \leq \sqrt[p]{\|u_n\|_{L^p}^p} \leq \sqrt[p]{\|u_n\|_{L^p}^p + \|\nabla u_n\|_{L^p}^p} = \|u\|_{W^{1,p}} \leq M.$$

On procède de la même manière pour montrer que $\|\nabla u\|_{L^p} \leq M$. Ainsi puisqu'il existe une sous-suite convergeant faiblement pour toute suites bornée dans $L^p(\Omega)$ par le théorème 1.7, on sait qu'il existe une sous-suite u_{n_k}, et des fonctions u,v_i, $i = 1, \ldots, n$ tels que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{ et } \quad \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \rightharpoonup v_i \text{ dans } L^p(\Omega).$$

De plus $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$, car pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega v_i \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \varphi = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi.$$

Ce qui implique par le lemme fondamental du calcul des variations que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ *p.p.* Néanmoins comme nous ne faisons pas la distinction des éléments qui sont égaux presque partout dans les espaces $L^p(\Omega)$, on a $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ au sens des espaces L^p. □

Définition 1.26. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné. On dit que Ω est un ensemble ouvert borné de bord de classe C^k, $k \geq 1$, si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x et une application bijective $H\colon Q \to U$ où

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$$

$$H \in C^k(\overline{\Omega}),\ H^{-1} \in C^k(\overline{U}),\ H(Q_+) = U \cap \Omega,\ H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$$

où $Q_+ = \{x \in Q : x_n > 0\}$ et $Q_0 = \{x \in Q : x_n = 0\}$.

Si H et H^{-1} sont lipschitziennes, c'est-à-dire que $H, H^{-1} \in C^{0,1}(\Omega)$, alors on dit que Ω est un ensemble ouvert borné avec un bord Lipschitz.

Remarque 1.27. Un polyhèdre ou un ensemble convexe a un bord Lipschitz, tandis que la boule unitée a un bord de classe C^∞.

Le théorème et corollaire à venir sont particulièrement utiles lorsqu'il faudra effectuer une approximation de $\|u\|_{L^p}$ par rapport $\|\nabla u\|_{L^p}$, ce qui sera le cas dans le chapitre concernant l'intégrale de Dirichlet.

Théorème 1.28 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leq p \leq \infty$. Alors pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une constante $\gamma > 0$ dépendant du l'ouvert Ω et p tel que*

$$\|u\|_{L^p} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p}$$

ou de manière équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Démonstration. Nous ne démontrerons que le cas où $p = 2$. De plus nous imposerons comme condition supplémentaire que le bord $\partial\Omega$ soit de classe C^1. Considérons tout d'abord $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Puisque Ω est borné, cela implique que

$$M = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \|x\| \leq \alpha, x \in \Omega\} < \infty.$$

Puisque $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\|u\|_{L^2} < \infty \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} < \infty.$$

Si $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, représente la normale extérieur de Ω alors on obtient en intégrant par partie

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 \cdot 1 \, dx = \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, x_i \nu_i \, dS - \int_\Omega x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u(x)|^2\right) dx.$$

Or le premier terme de la dernière égalité est nul, car u est nul sur le bord, puisque $u \in C_0^\infty(\Omega)$. De plus, on a par définition de M que $x_i \leq M$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ce qui nous permet d'affirmer :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq 2M \int_\Omega |u(x)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \, dx \leq 2M \|u\|_{L^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}$$

où la dernière égalité s'obtient grâce à l'inégalité de Hölder, que l'on peut appliquer ici, car $|u|, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \in L^2(\Omega)$. En supposant que u ne soit pas la fonction identiquement nul (auquel cas l'inégalité est triviale), on peut diviser les deux côtés de l'inégalité par $\|u\|_{L^2}$. Ce qui nous permet d'écrire en prenant le carré de l'égalité obtenu :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq 4M^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \leq 4M^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

En procédant de la même manière pour les n variables x_i, $1 \leq i \leq n$, on obtient

$$n \|u\|_{L^2}^2 \leq 4M^2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 = 4M^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Finalement, en divisant par n l'une et l'autre extrémités de la dernière égalité et en prenant la racine carrée, on obtient le résultat désiré pour les fonctions appartenant à $C_0^\infty(\Omega)$.

Montrons à présent le théorème pour $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Par définition de $W_0^{1,2}(\Omega)$, on peut trouver $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ une suite de fonction tel que $u_n \to u$ dans $W^{1,2}(\Omega)$. En d'autres termes, on a $\|u - u_n\|_{W^{1,2}} \to 0$, ou plus précisément

$$\|u - u_n\|_{L^2} \to 0 \quad \text{et} \quad \|\nabla u - \nabla u_n\|_{L^2} \to 0,$$

ce qui nous permet d'affirmer au moyen du théorème (1.14) que

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} \to \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Soit à présent $\varepsilon > 0$ fixé. Ainsi on sait que pour n suffisamment grand on a $\|u - u_n\|_{L^2} \leq \varepsilon$. Ainsi en utilisant l'inégalité trouvé auparavant pour les fonctions $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2} &\leq \|u - u_n\|_{L^2} + \|u_n\|_{L^2} \leq \varepsilon + \gamma \|\nabla u_n\|_{L^2} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon + \gamma \|\nabla u\|_{L^2} \end{aligned}$$

Ainsi en laissant ε tendre vers 0, on montre le résultat désiré. $\square$

Corollaire 1.29. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord de classe Lipschitz et $u, u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe des constantes $\gamma_i = \gamma_i(\Omega, p) > 0$, $i = 1, 2$ tel que*

$$\gamma_1 \|u\|_{W^{1,p}} - \gamma_2 \|u_0\|_{W^{1,p}} \leq \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Démonstration. On a d'une part l'inégalité

$$\|u\|_{W^{1,p}} - \|u_0\|_{W^{1,p}} \leq \|u - u_0\|_{W^{1,p}}$$

grâce à l'inégalité triangulaire inverse pour les normes et d'autre part l'inégalité de Poincaré appliqué à la fonction $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ implique qu'il existe une constante $\gamma > 0$ tel que

$$\|u - u_0\|_{W^{1,p}} \leq \gamma \|\nabla(u - u_0)\|_{L^p} \leq \gamma(\|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla u_0\|_{L^p}).$$

En assemblant les deux inégalités, on sait que

$$\|u\|_{W^{1,p}} - \|u_0\|_{W^{1,p}} \leq \gamma(\|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla u_0\|_{L^p}).$$

En notant que $-\|\nabla u_0\|_{L^p} \geq -\|u_0\|_{W^{1,p}}$, on obtient, en réarrangeant les termes, que

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq \frac{1}{\gamma}(\|u\|_{W^{1,p}} - \|u_0\|_{W^{1,p}}) - \|\nabla u_0\|_{L^p} \geq \frac{1}{\gamma}\|u\|_{W^{1,p}} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\|u_0\|_{W^{1,p}}.$$

En posant $\gamma_1 = \gamma^{-1}$ et $\gamma_2 = 1 - \gamma^{-1}$, on obtient le résultat désiré. $\square$

Les théorèmes suivants ne sont pas à proprement parler liés aux espaces de Sobolev, néanmoins nous les utiliserons souvent lorsqu'il s'agira de déterminer les équations d'Euler-Lagrange, ou alors de montrer que les versions faibles de certains problèmes sont équivalents à leur version forte.

Théorème 1.30 (Théorème de la Divergence)**.** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord $\partial\Omega$ est classe C^1, une fonction $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable ($F \in C^1(\overline{\Omega})$), $\nu = (\nu_1, \dots, , \nu_n)$ la normale extérieur de $\partial\Omega$. Alors*

$$\int_\Omega divF(x)\,dx = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\,dS,$$

où dS représente l'intégrale de surface et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien habituel.

Proposition 1.31 (Intégration par parties)**.** *Soient Ω et ν comme dans le théorème précédent, et des fonctions $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. On a alors pour $i = 1, \dots, n$,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,dS - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Démonstration. Soit $1 \le i \le n$ quelconque fixé. On applique alors le théorème de la divergence à la fonction $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ définie par $F(x) = (F^1(x), \dots, F^n(x))$, où $F^i(x) = u(x)v(x)$ et $F^j(x) = 0$ pour $j \neq i$. On remarque que la divergence de F nous donne

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

De plus l'intégrale sur le bord de Ω du produit scalaire entre F et ν la normale extérieure nous donne

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\,dS = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,dS.$$

Finalement puisque la fonction F respectant les conditions du théorème de la divergence, nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(F) - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,dS - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Comme i était quelconque, le résultat est donc valable pour tout $1 \le i \le n$. □

1.4 Analyse convexe

Nous rappelons dans cette section des résultats élémentaires en analyse convexe. Ces rappels nous seront particulièrement utiles lors de l'étude des problèmes variationnels.

Définition 1.32. (i) Un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si pour tout x, y dans Ω, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$.

(ii) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe. On dit qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est *convexe* si pour tout $x, y \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a l'inégalité

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(iii) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe. On dit qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est *strictement convexe* si pour tout $x, y \in \Omega, x \neq y$ et pour tout $\lambda \in (0,1)$ on a l'inégalité

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Théorème 1.33. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) La fonction f est convexe.

ii) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a l'inégalité

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

iii) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, l'inégalité suivante est valide

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Lemme 1.34. *Soit $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ des fonctions convexes. Si f est croissante, alors $f \circ g$ est une fonction convexe.*

Démonstration. Soit $\lambda \in [0,1]$ quelconque. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a par convexité de g que

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

De plus, du fait que f est croissante nous obtenons

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)).$$

Finalement en utilisant la convexité de f nous obtenons

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))) \\ &\leq \lambda (f \circ g)(x) + (1-\lambda)(f \circ g)(y),\end{aligned}$$

montrant ainsi la convexité de $f \circ g$. □

Proposition 1.35. *Soit $1 \leq p < \infty$. La fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $x \to |x|^p$. On a alors les résultats suivants.*

(i) f est convexe.

(ii) On a l'inégalité $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. Le cas où $p = 1$ se prouve immédiatement en utilisant l'inégalité triangulaire de la norme. En effet, on obtient trivialement

$$\begin{aligned}f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= |\lambda x + (1-\lambda y)| \leq \lambda\,|x| + (1-\lambda)\,|y| \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).\end{aligned}$$

Ensuite remarquons que la fonction de $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $x \to x^p$ est convexe. En effet, g est croissante, puisque sa dérivée donnée par $g'(x) = px^{p-1}$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

De plus g' est également croissante, car si $p > 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $g''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ qui est positive. Si $x = 0$ alors $g'(x) = 0$, impliquant donc que $g'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ quelconque et sans perte de généralité supposons $x < y$. Notons que nous avons par les observations précédentes que

$$p\underbrace{\left(y^{p-1} - x^{p-1}\right)}_{\geq 0}\underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \geq 0$$

Ainsi par le point *(iii)* du théorème 1.33 on obtient que g est convexe.

Finalement, en définissant la fonction $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $x \to |x|$, on conclut que $f = g \circ h$ est convexe en utilisant le lemme 1.34.

En ce qui concerne la partie (*ii*), en posant $\lambda = 1/2$ on obtient grâce à la convexité de f que

$$|x + y| = \left|\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}2y\right|^p \leq \frac{1}{2}\,|2x|^p + \frac{1}{2}\,|2y|^p = 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$$

achevant ainsi la démonstration de la proposition. □

Chapitre 2

Calculs des Variations

Nous rappellerons dans cette section la motivation de l'étude des calculs des variations et énoncerons quelques équations aux dérivées partielles que nous essayerons de résoudre. Par la suite, nous travaillerons sur la version faible de ses problèmes et tenterons de trouver des solutions en étudiant le problème variationnel qui leur est associé.

2.1 Introduction

Nous rappelons que le calcul des variations tente de résoudre le problème suivant.

Définition 2.1. Nous aimerions donc trouver un *minimiseur* $\overline{u} \in X$ de (Q), signifiant l'on cherche $\overline{u} \in X$ tel que

$$(Q) \quad I(\overline{u}) = \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega g(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in X \right\} = m,$$

où nous avons comme paramètres

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ est un ouvert borné, et un point d'Ω est noté $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$, où $N \geq 1$ et $u = (u^1, \dots, u^N)$, et par conséquent

  $$\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n}.$$

  Notons que nous nous sommes restreint à l'étude du cas monodimensionnel, c'est-à-dire où $N = 1$.
- $g \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, et g est continue.
- $X = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 2.2. On remarque que le minimiseur $\overline{u}$ respecte l'équation

$$I(\overline{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in X.$$

Motivation à l'étude du calculs des variations. On sait qu'il n'existe pas de théorie générale pour résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires. Néanmoins, le calcul des variations permet de résoudre une classe particulière de ces équations differentielles. En effet, supposons que le problème initiale s'écrive

$$A(u) = 0. \tag{2.1}$$

où A est un opérateur différentiel, non obligatoirement linéaire. La classe d'équations aux dérivées partielles que tente de résoudre le calcul des variations est celle dont la version faible de 2.1 serait la *dérivée*, c'est-à-dire d'un autre opérateur $I(\cdot)$. Par conséquent la version faible du problème initiale s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} I(u + t\varphi) = 0,$$

pour tout φ dans un certain ensemble de fonction.

L'avantage de cette formulation est que l'on peut reconnaître les solutions de l'EDP (2.1), comme un point stationnaire de $I(\cdot)$. Par conséquent, si l'opérateur $I(\cdot)$ atteint un minimum en $\overline{u}$ alors $\overline{u}$ est donc une point stationnaire de $I(\cdot)$ et par conséquent solution faible de l'équation (2.1). On en conclut que bien qu'il puisse être très difficile de trouver une solution à l'équation (2.1), celle-ci peut-être donnée en trouvant un point stationnaire de $I(\cdot)$, ce qui peut être une tâche plus aisée.

Précisions ce qui a été dit auparavant. Nous supposerons dans ce qui suit que toutes les opérations que nous effectuerons sont légales. En particulier l'existence des dérivées, ou bien la possibilité de permuter limites et intégrales. Supposons que $I(\cdot)$ s'écrive explicitement sous la forme

$$I(u) = \int_\Omega g(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

où Ω, u, g sont comme dans la définition 2.1. Notons néanmoins que de ce qui suit, nous demandons à g d'être plus que continue, *i.e.* également deux fois différentiable. Supposons à présent que $\overline{u} \in X$ soit une minimiseur parmi les éléments de X de $I(u)$. Nous allons montrer que $\overline{u}$ est forcément une solution d'une EDP particulière. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ quelconques. De plus prenons $\delta > 0$ et définissons la fonction $i\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ par

$$i(\varepsilon) := I(\overline{u} + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega g(x, \overline{u} + \varepsilon\varphi, \nabla\overline{u} + \varepsilon\nabla\varphi) dx.$$

Puisque $\overline{u}$ est un minimiseur et que $\overline{u} + \varepsilon\varphi \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$i'(0) = 0. \tag{2.2}$$

Toutefois, si nous calculons de manière explicite $i'(0)$, nous obtenons par définition usuelle de la dérivée

$$\begin{aligned} i'(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon\varphi) \\ &= \int_\Omega g_u(x, \overline{u} + \varepsilon\varphi, \nabla\overline{u} + \varepsilon\nabla\varphi)\varphi + \sum_{i=1}^n g_{\xi_i}(x, \overline{u} + \varepsilon\varphi, \nabla\overline{u} + \varepsilon\nabla\varphi) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

où $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}, g_{\xi_i} = \frac{\partial g}{\partial \xi_i}$. En combinant la dernière équation et l'équation (2.2), nous obtenons pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$(E_w) \quad 0 = \frac{d}{d\varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + g_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\varphi \, dx$$

Ainsi si $\overline{u}$ est un minimiseur de I alors c'est une solution de l'équation (E_w). On appelle par ailleurs l'équation (E_w) l'équation d'*Euler-Lagrange faible*. En intégrant par partie cette dernière équation, nous obtenons, puisque φ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$0 = \int_\Omega \left(g_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}) \right) \right) \varphi \, dx, \ \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Finalement en invoquant le lemme fondamental du calcul des variations nous obtenons

$$(E) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}) = g_u(x, \overline{u}, \nabla\overline{u}) \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Nous appellons l'équation (E), l'équation d'*Euler-Lagrange* associé au problème (Q). Cela nous amène donc à la définition suivante.

Définition 2.3 (Euler-Lagrange)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ et $g \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $g = g(x, u, \xi)$, avec $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ et $u\colon\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) On appelle l'équation d'*Euler-Lagrange faible* associé (Q) l'équation

$$(E_w) \quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x, u, \nabla u) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + g_u(x, u, \nabla u)\varphi \, dx = 0 \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

où $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$, $g_{\xi_i} = \frac{\partial g}{\partial \xi_i}$.

ii) Si $g \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on appelle l'équation d'*Euler-Lagrange* associé au problème (Q) l'équation

$$(E) \quad \operatorname{div}(g_\xi(x, u, \nabla u)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [g_{\xi_i}(x, u, \nabla u)] = g_u(x, u, \nabla u),$$

où $g_\xi = (g_{\xi_1}, \ldots, g_{\xi_n})$.

Nous venons de montrer que tout minimiseur $\overline{u}$ de (Q) est une solution de (E_w). De plus si les fonctions g et $\overline{u}$ sont plus régulières, c'est-à-dire respectivement $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $C^2(\overline{\Omega})$ alors $\overline{u}$ satisfait (E).

Il reste à savoir si la réciproque est vraie. Explicitement, cela revient à savoir si le fait que $\overline{u}$ soit une solution de (E) ou (E_w) implique qu'il soit une minimiseur de (Q). Nous montrerons que la réciproque est vraie dans le cas où la fonction $(u\xi) \to g(x, u, \xi)$ est convexe, et si cette fonction est strictement convexe, alors le minimiseur est de plus unique.

2.2 Exemples

Nous allons à présent donner quelques exemples de problèmes liés au calculs des variations.

Exemple 2.4 (Principe de Fermat)**.** Nous aimerions trouver la trajectoire que devrait suivre un rayon de lumière dans un milieu avec un indice de réfraction non constant. On peut formuler le problème dans notre formalisme. Nous avons donc $n = N = 1$,

$$g(x, u, \xi) = f(x, u)\sqrt{1 - \xi^2}$$

et

$$(Q) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\, dx : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\} = m.$$

Nous étudierons abondamment l'exemple suivant dans le prochain chapitre.

Exemple 2.5 (L'intégrale de Dirichlet)**.** Cet exemple est assurément l'un des problèmes les plus étudiés en calcul des variations. Nous avons ici, $n > 1$ et N=1

$$(D) \qquad I(\overline{u}) = \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} \left|\nabla u(x)\right|^2 \ dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = m.$$

L'équation d'*Euler-Lagrange* associé à ce problème n'est nul autre que l'*équation de Laplace*, nommément $\Delta u = 0$.

L'exemple suivant met en évidence la raison de l'utilisation des espaces de Sobolev lors du choix de l'espace de fonction X.

Exemple 2.6. Supposons $\Omega = (-1, 1)$, $g(u, \xi) = u^2(1 - \xi)^2$. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de solution au problème

$$(Q) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_{-1}^1 g(u(x), u'(x))dx \right\} = m.$$

où $X = \{u \in C^1(-1, 1) : u(-1) = 0 \text{ et } u(1) = 1\}$. Néanmoins, la fonction

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$

est une solution de (Q) parmi les fonctions C^1 par morceaux. En effet, notons tout d'abord que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y)$ est positive, et donc $I(u)$ l'est aussi. On tire de ce fait que $m \geq 0$. De plus, nous avons

$$0 \leq \int_{-1}^1 g(v(x), v'(x))dx = \int_0^1 v(x)^2(1 - v'(x))^2 dx = \int_0^1 x^2(1 - 1)^2 dx = 0,$$

impliquant que v est effectivement une solution du problème (Q) parmi les fonctions C^1 par morceaux.

Montrons à présent que le problème (Q) ne possède aucune solution dans X. Nous avons naturellement que $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et donc en particulier appartient à $W^{1.4}(\Omega)$.

De plus, par densité de l'espace C^∞ dans $W^{1,4}$, nous pouvons trouver une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $u(-1) = 0, u(1) = 1$, impliquant donc $u \in X$, et respectant

$$\|u - v\|_{L^4}^4 + \|u' - v'\|_{L^4}^4 \leq \varepsilon.$$

Nous notons tout d'abord que

$$\begin{aligned} |g(v, v') - g(u, u')| &= \left|(v(1 - v'))^2 - (u(1 - u'))^2\right| \\ &= \left|(u^2 - v^2)(1 - v')^2 - u^2((1 - u')^2 - (1 - v')^2)\right| \\ &\leq \left|(1 - v')^2(u + v)(u - v)\right| + \left|u^2(u' + v')(u' - v')\right| \end{aligned}$$

Par conséquent nous déduisons

$$0 \leq I(u) = \int_{-1}^{1} g(u,u')dx - \underbrace{\int_{-1}^{1} g(v,v')dx}_{=0} \leq \int_{-1}^{1} |g(u,u') - g(v,v')| \, dx.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$0 \leq I(u) \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|(1-v')^2\right\|_{L^2} \|(u+v)(u-v)\|_{L^2} + \left\|u^2\right\|_{L^2} \|(u'+v')(u'-v')\|_{L^2}.$$

On remarque que

$$\left\|(1-v')^2\right\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |(1-v')^2|^2 \, dx} = \|1-v'\|_{L^4}^2 < \infty,$$

puisque nous avons supposé $v \in W^{1,4}(\Omega)$. Idem pour $\|u^2\|_{L^2} = \|u\|_{L^4}^2$. Par conséquent nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 \leq I(u) &\leq C\left(\|(u+v)(u-v)\|_{L^2} + \|(u'+v')(u'-v')\|_{L^2}\right) \\ &\leq C(\|u+v\|_{L^4} \|u-v\|_{L^4} + \|u'+v'\|_{L^4} \|u'-v'\|_{L^4}) \leq \gamma\varepsilon, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse $u, v \in W^{1,4}(\Omega)$.

Comme ε est arbitraire on en conclut que $m = 0$. Il est par conséquent impossible de trouver une solution u dans X. En effet, nous aurions $u \equiv 0$ ou bien $u' \equiv 1$, et dans les deux cas, les conditions de bord ne peuvent clairement pas être respectées.

Pour finir cette section, nous présentons l'une des inégalités fondamentale de géométrie : l'inégalité isopérimétrique.

Exemple 2.7 (Inégalité Isopérimétrique)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert borné, donc le bord ∂A est une courbe simple fermée suffisamment régulière. Nous notons $L(\partial A)$ la longueur du bord, et par $M(A)$ la mesure, dans ce cas l'aire, de A. L'inégalité isopérimétrique affirme alors

$$|L(\partial A)|^2 - 4\pi M(A) \geq 0.$$

avec égalité si et seulement si A est un disque, c'est-à-dire ∂A est un cercle.

Nous pouvons réécrire le problème sous notre formalisme. Nous obtenons alors $n = 1, N = 2$ et comme courbe paramétrique pour ∂A,

$$\partial A = \{u(x) = (u^1(x), u^2(x) : x \in [a,b]\},$$

et en posant

$$L(\partial A) = L(u) = \int_a^b \sqrt{((u^1)')^2 + ((u^2)')^2} \, dx$$

$$M(A) = M(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(u^1(u^2)' - u^2(u^1)'\right) dx = \int_a^b u^1(u^2)' \, dx.$$

Le problème est alors de montrer que

$$(Q) \quad \inf\{L(u) : M(u) = 1, u(a) = u(b)\} = 2\sqrt{\pi}.$$

2.3 Equations aux dérivées partielles

Pour finir ce chapitre, nous énonçons quelques problèmes aux dérivées partielles classiques que nous allons tenter de résoudre au moyen du calcul des variations.

Définition 2.8 (Equation de Laplace)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord Lipschitz et $1 \leq p, q \leq \infty$ tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

(i) Si $u \in C^2(\Omega)$, on appelle l'équation de Laplace le problème

$$(L) \quad \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Une fonction u satisfaisant l'équation (L) est appelée une fonction harmonique.

(ii) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On appelle l'équation

$$(L)' \qquad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

la version faible du problème de Laplace.

Remarque 2.9. Si $u \in C^2(\Omega)$, on remarque que (L) est équivalent à (L'). En effet on passe de la version forte à la version faible en multipliant (L) par la fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et en intégrant par partie. En effet, si nous posons

$$F(x) = (F^1(x), \dots F^n(x)) = \left(\varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right),$$

il résulte de l'équation $\varphi \Delta u = 0$ que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \varphi \Delta u dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(F) dx - \int_\Omega \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS - \int_\Omega \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle dx \\ &= - \int_\Omega \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle dx, \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient en remarquant que pour tout $i = 1, \dots, n$, $F^i(x) = \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$, si x se trouve sur $\partial\Omega$ car φ est à support compact dans Ω.

Définition 2.10 (Equation de Dirichlet et de Poisson)**.** En prenant les mêmes conditions sur Ω, p, q que dans la définition précédente, on définit les problèmes de Dirichlet et de Poisson de la manière suivante.

(i) Soit $u_0 \in C(\Omega)$. On appelle la version forte *du problème de Dirichlet*, le problème consistant à trouver $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

(ii) Soit $f, u_0 \in C(\Omega)$. On appelle la version forte de *l'équation de Poisson*, le problème consistant à trouver $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

(iii) Soit $u, u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. On appelle *la version faible du problème de Dirichlet* le problème qui consiste à trouver $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que

$$(D)' \qquad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(iv) Soit $u, u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On appelle *la version faible du problème de Poisson* le problème qui consiste à trouver

$$(P)' \quad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Remarque 2.11. Le problème de Laplace (L) est ainsi un cas particulier du problème de Dirichlet avec $u_0 = 0$, et le problème de Dirichlet est un cas particulier du problème de Poisson avec $f = 0$.

Par conséquent si l'on est capable de trouver des solutions (faibles) de l'équation de Poisson, on sera aussi en mesure d'en trouver pour les équations (faibles) de Dirichlet et de Laplace.

Chapitre 3

Intégrale de Dirichlet

Nous introduisons dans ce chapitre le problème à la base du calculs des variations, c'est-à-dire l'intégrale de Dirichlet.

Définition 3.1 (L'intégrale de Dirichlet). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord Lipschitz et $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. On appelle le problème qui consiste à trouver $\overline{u}$ satisfaisant

$$(D) \qquad I(\overline{u}) = \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,2}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} \left|\nabla u(x)\right|^2 \, dx \right\} = m.$$

l'intégrale de Dirichlet.

Nous allons résoudre un problème plus compliqué que (D). C'est-à-dire que si $f \in L^{p'}(\Omega)$ et $1 < p < \infty$ nous sont donnés, nous essayerons de trouver $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$(P) \qquad I(\overline{u}) = \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,p}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} \left|\nabla u(x)\right|^p - fu \, dx \right\} = m.$$

Nous résoudrons ce problème dans quelques cas particuliers. Tout d'abord, nous poserons $p = 2$ et $u_0 = 0$, et chercherons $u \in W_0^{1,2}$ satisfaisant l'équation (P). L'existence et l'unicité d'un tel u se fera au moyen du théorème de Lax-Milgram.

Ensuite, nous garderons $p = 2$ mais nous laisserons u_0 être un quelconque élément de $W^{1,2}(\Omega)$ et essayerons de généraliser la méthode de Lax-Milgram qui dans ce cas ne fonctionnera plus, car nous ne pourrons plus utiliser la même méthode pour garantir que $m = \inf\{I(u)\}$ est fini.

Nous montrerons à nouveau l'existence et l'unicité de la solution $\overline{u}$ respectant (P). Par la suite, nous démontrerons qu'un minimiseur du problème (P) satisfait l'équation d'Euler-Lagrange et que réciproquement une solution de l'équation d'Euler-Lagrange est un minimiseur du problème (P).

Finalement, nous prendrons $1 < p < \infty$ quelconque et montrerons les mêmes propriétés que pour $p = 2$. Nous remarquerons que les démonstrations sont quasiment identiques, et la lecture pourra sembler redondante.

3.1 Cas $p = 2$ et $u_0 = 0$

Comme annoncé précédemment, nous allons résoudre un problème plus difficile que l'intégrale de Dirichlet, qui sera en fait un cas particulier de notre nouveau problème. Supposons ainsi que dans le problème variationnel (P) nous ayons $p = 2$ et $u_0 = 0$. Le problème se reformule alors

$$(P) \qquad I(\overline{u}) = \inf_{u \in W_0^{1,2}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - fu \, dx \right\} = m.$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. Ainsi nous avons selon notre description du problème du calcul des variations

$$g(x, u, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} - fu.$$

L'équation faible d'Euler-Lagrange de (P) s'écrit alors

$$(E_w) \quad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

qui n'est rien d'autre que la version faible du problème de Poisson.

Nous allons résoudre l'équation d'*Euler-Lagrange faible*, en appliquant le théorème de Lax-Milgram à l'espace de fonction $W_0^{1,2}(\Omega)$ et les applications $b : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$b(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \tag{3.1}$$

et $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \text{avec } f \in L^2(\Omega). \tag{3.2}$$

Nous obtiendrons de plus que la solution $\overline{u}$ de (E_w) sera alors un minimiseur de (P). En effet nous pouvons voir cela de deux façons. La première manière est de supposer $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ quelconque et de poser $\varphi = u - \overline{u}$. On observe alors que $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et que

$$\begin{aligned} I(u) = I(\overline{u} + \varphi) &= \int_\Omega \frac{|\nabla \overline{u} + \nabla \varphi|^2}{2} - f\overline{u} - f\varphi \, dx \\ &= I(\overline{u}) + \int_\Omega \langle \nabla \overline{u}, \nabla \varphi \rangle - f\varphi \, dx + \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \, dx \geq I(\overline{u}) \end{aligned}$$

puisque le second terme de la dernière égalité vaut 0, selon (E_w) et le dernier terme est positif.

L'autre perspective est de se remémorer la démonstration de Lax-Milgram. En effet, celle-ci s'était faite en cherchant un minimiseur $\overline{u}$ de

$$\frac{b(x, x)}{2} - F(x).$$

Ce qui dans notre cas se traduit, selon les équations (3.1) et (3.2) par

$$(P) \quad \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla \overline{u}|^2 \, dx - \int_\Omega f\overline{u} \, dx,$$

impliquant par conséquent que $\overline{u}$ est un minimiseur de (P).

Rappelons tout d'abord le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3.2 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de Banach, $(E)'$ le dual de E, F un élément de $(E)'$, et b une forme bilinéaire, symétrique, coercive et continue. Alors il existe un unique x_0 dans E, tel que*

$$F(y) = b(y, x_0) \quad \forall y \in E.$$

Nous aimerions ainsi démontrer le théorème suivant au moyen de Lax-Milgram.

Théorème 3.3. *Soit $E = W_0^{1,2}(\Omega)$. Si les applications de b et F sont définies comme précédemment, alors il existe un unique $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega f \cdot v \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx.$$

Démonstration. Montrons que les conditions de Lax-Milgram sont satisfaites. Tout d'abord $W_0^{1,p}$ est complet. En effet, cela découle du fait que $W_0^{1,2}(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de l'espace complet $W^{1,2}(\Omega)$ et donc complet. Montrons à présent que b et F ont les bonnes propriétés.

Bilinéarité et Symétrie de b . Elles découlent de la définition du produit scalaire euclidien et des propriétés de linéarité de l'intégrale de Lebesgue.

Coercivité de b . Soit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ alors en utilisant l'inégalité de Poincaré on a

$$b(v, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \gamma^2 \|v\|_{W^{1,2}}^2$$

où γ est donnée par l'inverse de le constante de Poincaré.

Continuité de b . On utilise l'inégalité de Hölder pour montrer que b est borné. En effet, soit $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ quelconques, alors

$$\begin{aligned} |b(u,v)| &= \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \\ &\leq \gamma \|u\|_{W^{1,2}} \|v\|_{W^{1,2}} < \infty \end{aligned}$$

Linéarité et continuité de F L'application F est définie de $W_0^{1,2}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ par définition de F. De plus elle est linéaire grâce à la linéarité de l'intégrale de Lebesgue, et puisque $f \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \gamma \|f\|_{L^2} \|v\|_{W^{1,2}},$$

ce qui implique que F est continue.

Par conséquent on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram appliqué à l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ et aux formes b et F définies par

$$\begin{aligned} b(u,v) &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \\ F(v) &= \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \text{avec } f \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Il existe donc $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ on ait

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u ; \nabla v \rangle \, dx = b(u,v).$$

Ainsi s'achève la démonstration. □

Remarque 3.4. On a ainsi résolu le problème de Dirichlet avec $u_0 = 0$.

3.2 Cas $p = 2$ et $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$

Théorème 3.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord Lipschitz, $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Le problème*

$$(P) \qquad \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,2}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - fu \, dx \right\} = m.$$

possède une unique solution $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$.

De plus si $\overline{u}$ est un minimiseur de $(P)'$ alors il satisfait l'équation

$$(P)' \qquad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.3}$$

Réciproquement, si $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ est solution de l'équation $(P)'$, alors c'est un minimiseur de (P).

Démonstration. Nous diviserons cette démonstration en quatre parties. Nous montrerons d'abord l'existence puis l'unicité d'une solution, puis nous établirons l'équation d'Euler Lagrange de notre problème, et finalement la réciproque. L'existence de la solution se montrera en 3 partie. Si $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est une suite minimisant $I(u)$, alors on montrera la compacité de $I(u_n)$, la semi-continuité inférieur de $I(u_n)$, et enfin nous lierons les deux résultats.

Existence d'un minimiseur : Compacité. On commencera tout d'abord par montrer que $m < \infty$, et on montrera par la suite que $m > -\infty$.

Puisque $f \in L^2(\Omega)$, cela implique que $\|f\|_{L^2} < \infty$. De plus comme $u_0 \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$, on obtient que

$$m \leq I(u_0) \leq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + |fu| \, dx \leq \|u_0\|_{W^{1,2}} + \|f\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \infty.$$

Ensuite, soit $u_n \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ une suite minimisante de $(P)'$, c'est-à-dire

$$I(u_n) \to \inf(I(u)) = m \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Nous remarquons que

$$\|u_n\|_{L^2} \leq \|u_n - u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} \leq \alpha_1 \|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2}$$

où $\alpha_1 > 0$ et où la dernière inégalité se justifie par l'inégalité de Poincaré appliquée à $u_n - u_0$ qui appartient $W_0^{1,2}(\Omega)$. De plus, par inégalité triangulaire, il existe une constante $\alpha_2 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\alpha_1 \|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} &\leq \alpha_1 \|\nabla u_n\|_{L^2} + \alpha_1 \|\nabla u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} \\ &\leq \alpha_1 \|\nabla u_n\|_{L^2} + \alpha_2 \|u_0\|_{W^{1,2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $\alpha_3 > 0$ telle que

$$I(u_n) + \alpha_3 \geq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 - \alpha_1 \|f\|_{L^2} \|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

En avançant le même argument que lors de la démonstration du théorème de Lax-Milgram, le terme de droite de la dernière équation est quadratique en $\|\nabla u_n\|_{L^2}$ impliquant ainsi que l'expression admet un minimum. De plus puisque m est borné par le haut, en utilisant le corollaire 1.29, on peut finalement affirmer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n\|_{W1,2} < M.$$

Par conséquent, par le théorème 1.7, il existe $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ et une sous-suite de u_n (que l'on notera toujours u_n) tel que

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{dans } W^{1,2}, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Existence : Semicontinuité inférieure. Nous allons montrer que I est faiblement semicontinue inférieurement, c'est-à-dire

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{dans } W^{1,2} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u}).$$

Cette étape est indépendante du fait que u_n soit une suite minimisante. Tout d'abord, puisque $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ et que $f \in L^2(\Omega)$. En effet, on a par définition de convergence faible

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f u_n \, dx = \int_\Omega f u \, dx.$$

Impliquant donc

$$\liminf_{n\to\infty} \left(-\int_\Omega f u_n \, dx \right) \geq \int_\Omega (-fu) \, dx. \tag{3.4}$$

Par la suite on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 = \frac{1}{2} |\nabla u_n - \nabla\overline{u} + \nabla\overline{u}|^2 &= \frac{1}{2} |\nabla\overline{u}|^2 + \langle \nabla\overline{u}, \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle + \frac{1}{2} |\nabla u_n - \nabla\overline{u}|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |\nabla\overline{u}|^2 + \langle \nabla\overline{u}, \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle\end{aligned}$$

En intégrant on obtient

$$\int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 \, dx \geq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla\overline{u}|^2 \, dx + \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}, \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle dx.$$

Il reste à montrer que le dernier terme de la dernière équation tend vers 0. En effet puisque $\nabla\overline{u} \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u_n - \nabla\overline{u} \rightharpoonup 0$ dans L^2, cela implique par convergence faible dans $L^2(\Omega)$ que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle \nabla\overline{u}, \nabla u_n - \nabla\overline{u}\rangle dx = 0.$$

Impliquant donc

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 \, dx \geq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla \overline{u}|^2 \, dx. \tag{3.5}$$

Pour conclure, en assemblant les équations (3.4) et (3.5), on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{2} - f u_n \; dx \geq \int_\Omega \frac{|\nabla \overline{u}|^2}{2} - f\overline{u} \; dx = I(\overline{u})$$

Existence : Conclusion On combine les résultats obtenus dans la partie une et deux de l'existence pour conclure. Nous avons par le fait que u_n soit une suite minimisante que

$$m = \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \inf\{I(u)\}$$

et nous avons montré l'existence d'un $\overline{u}$ tel que

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u}).$$

Ce qui nous amène finalement à

$$m = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u}) \geq m.$$

Ainsi $\overline{u}$ est un minimiseur de $I(u)$.

Unicité. Supposons qu'il existe $\overline{u}, \overline{v} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que

$$I(\overline{u}) = I(\overline{v}) = m$$

et montrons que cela implique $\overline{u} = \overline{v}$. On pose $\overline{w} = (\overline{u} + \overline{v})/2$ et on a naturellement que $\overline{w} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ car $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ est un espace vectoriel. On peut prétendre que $\overline{w}$ est aussi un minimiseur car

$$m \leq I(\overline{w}) \leq \frac{I(\overline{u}) + I(\overline{v})}{2} = m. \tag{3.6}$$

En effet, en utilisant la convexité de la fonction $\xi \to |\xi|^2$, on a

$$\begin{aligned} m \leq I(\overline{w}) &= \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \frac{\nabla \overline{u} + \nabla \overline{v}}{2} \right|^2 - \frac{f\overline{u}}{2} - \frac{f\overline{v}}{2} \; dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{2} \left(\frac{|\nabla \overline{u}|^2}{2} + \frac{|\nabla \overline{v}|^2}{2} \right) - \frac{f\overline{u}}{2} - \frac{f\overline{v}}{2} \; dx = \frac{1}{2}\Big(I(\overline{u}) + I(\overline{v})\Big) = m. \end{aligned}$$

En reprenant (3.6), on peut écrire

$$\frac{I(\overline{u}) + I(\overline{v})}{2} - I(\overline{w}) = \int_\Omega \frac{|\nabla \overline{u}|^2 + |\nabla \overline{v}|^2}{2} - \left| \frac{\nabla \overline{u} + \nabla \overline{v}}{2} \right|^2 = 0.$$

De plus en appelant encore une fois à la convexité de la fonction $\xi \to |\xi|^2$ on a

$$\left| \frac{\nabla \overline{u} + \nabla \overline{v}}{2} \right|^2 \leq \frac{|\nabla \overline{u}|^2 + |\nabla \overline{v}|^2}{2},$$

impliquant donc

$$\frac{|\nabla\overline{u}|^2+|\nabla\overline{v}|^2}{2}-\left|\frac{\nabla\overline{u}+\nabla\overline{v}}{2}\right|^2\geq 0.$$

Par conséquent on peut affirmer, puisque l'intégrant est positif tandis que l'intégrale est nulle, que

$$\frac{|\nabla\overline{u}|^2+|\nabla\overline{v}|^2}{2}-\left|\frac{\nabla\overline{u}+\nabla\overline{v}}{2}\right|^2=0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

On utilise finalement le fait que la fonction $\xi\to|\xi|^2$ est strictement convexe pour obtenir que $\nabla\overline{u}=\nabla\overline{v}$ presque partout dans Ω. Ainsi $\overline{u}=\overline{v}+C$ $p.p$ où C est une constante dans $\mathbb{R}$, mais celle-ci vaut 0, car $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont égales sur le bord de Ω puisque $\overline{u},\overline{v}$ appartiennent à $u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$. On a par conséquent $\overline{u}=\overline{v}$ presque partout dans Ω.

Equation d'Euler-Lagrange. On va à présent établir l'équation $(P)'$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ arbitraire. On remarque que $\overline{u}+\varepsilon\varphi\in u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$, et du fait que $\overline{u}$ est un minimiseur de (P) on obtient

$$\begin{aligned}
I(\overline{u})\leq I(\overline{u}+\varepsilon\varphi)&=\int_\Omega\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}+\varepsilon\nabla\varphi|^2-f\overline{u}-\varepsilon f\varphi\,dx\\
&=\int_\Omega\frac{|\nabla\overline{u}|^2}{2}+\varepsilon\langle\nabla\overline{u},\nabla\varphi\rangle+\varepsilon^2\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}-f\overline{u}-\varepsilon f\varphi\,dx\\
&=I(\overline{u})+\varepsilon\Big(\int_\Omega\langle\nabla\overline{u},\nabla\varphi\rangle-f\varphi\,dx\Big)+\varepsilon^2\int_\Omega\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\,dx.
\end{aligned}$$

Ainsi puisque ε est arbitraire, cela amène immédiatement à $(P)'$ qui n'exprime, après avoir soustrait le terme à droite de l'égalité, rien d'autre que

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(\overline{u}+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}=0.$$

Réciproque On prouve pour conclure que si $\overline{u}\in u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$ est une solution de $(P)'$ alors c'est forcément un minimiseur de (P). Soit $u\in u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$ quelconque et posons $\varphi=u-\overline{u}$. On observe que $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ et que

$$\begin{aligned}
I(u)=I(\overline{u}+\varphi)&=\int_\Omega\frac{|\nabla\overline{u}+\nabla\varphi|^2}{2}-f\overline{u}-f\varphi\,dx\\
&=I(\overline{u})+\int_\Omega\langle\nabla\overline{u},\nabla\varphi\rangle-f\varphi\,dx+\int_\Omega\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\,dx\geq I(\overline{u})
\end{aligned}$$

puisque le second terme de la dernière égalité vaut 0, selon $(P)'$ et le dernier terme est positif. □

3.3 Cas $1<p<\infty$

Théorème 3.6. *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord Lipschitz, $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$ et $f\in L^{p'}(\Omega)$. Le problème*

$$(P)\qquad\inf_{u\in u_0+W_0^{1,p}}\left\{I(u)=\int_\Omega\frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p-fu\,dx\right\}=m.$$

possède une unique solution $\overline{u}\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration est très similaire au cas où $p = 2$. L'existence de la solution se montrera en 3 partie. Si $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une suite minimisant $I(u)$, alors on montrera la compacité de $I(u_n)$, la semi-continuité inférieure de $I(u_n)$, et enfin nous lierons les deux résultats.

Existence : Compacité Par hypothèse sur les fonctions f et u_0 on obtient que

$$m \leq I(u_0) = \int_\Omega \frac{|\nabla u_0|^p}{p} - fu \, dx \leq \|u_0\|_{L^p}^p + \|f\|_{L^{p'}} \|u_0\|_{L^p} ,$$

impliquant donc que $m = \inf\{I(u) : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\}$ est borné supérieurement. Soit alors $u_n \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite minimisante de (P), c'est-à-dire

$$I(u_n) \to \inf\{I(u)\} = m \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Nous allons montrer que que la suite u_n est bornée. Auparavant, nous remarquons que

$$\|u_n\|_{L^p} \leq \|u_n - u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} \leq \alpha_1 \|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p}$$

où $\alpha_1 > 0$. La dernière inégalité s'obtient grâce à l'inégalité de Poincaré car par définition de u_n on a $u_n - u_0$ appartient $W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, par inégalité triangulaire, il existe une constante $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} &\leq \alpha_1 \|\nabla u_n\|_{L^p} + \alpha_1 \|\nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} \\ &\leq \alpha_1 \|\nabla u_n\|_{L^p} + \alpha_2 \|u_0\|_{W^{1,p}} . \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire pour tout n

$$I(u_n) \geq \frac{1}{p} \|\nabla u_n\|_{L^p}^p - \alpha_1 \|f\|_{L^{p'}} \|\nabla u_n\|_{L^p} - \alpha_2 \|f\|_{L^{p'}} \|u_0\|_{W^{1,p}} .$$

Puisque f et u_0 appartiennent respectivement à $L^{p'}(\Omega)$ et à $W^{1,p}(\Omega)$, leur norme est finie, ce qui implique l'existence d'une constante α_3 telle que

$$I(u_n) + \alpha_3 \geq \frac{1}{p} \|\nabla u_n\|_{L^p}^p - \alpha_1 \|f\|_{L^{p'}} \|\nabla u_n\|_{L^p} . \tag{3.7}$$

Soit à présent un intervalle $J \subset \mathbb{R}_+$ contenant toutes les valeurs de $\|\nabla u_n\|_{L^p}$ et analysons la fonction $h\colon J \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \beta x^p - \gamma x \text{ où } \beta, \gamma > 0.$$

Il n'est pas difficile de remarquer que la fonction h est bornée si et seulement si l'intervalle J est borné.

Cette dernière remarque nous permet également d'affirmer que

$$m = \lim_{n\to\infty} I(u_n) \neq -\infty.$$

En effet, sans perte de généralité on peut supposer que l'intervalle J est fermé, et par conséquent la fonction h atteint son maximum et son minimum, et par conséquent en

remplaçant x par $\|\nabla u_n\|_{L^p}$ on obtient qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|I(u_n)| \leq K.$$

Revenant à l'équation (3.7), on peut donc constater que $\|\nabla u_n\|_{L^p}$ est bornée. Ainsi en utilisant le corollaire 1.29, on conclut aisément qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M.$$

Ainsi la suite u_n est bornée dans $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ impliquant donc qu'il existe une sous-suite de u_n que l'on nommera toujours u_n et une fonction $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ telles que

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Existence : Semicontinuité inférieure Cette étape est indépendante du fait que u_n soit une suite minimisante. En effet, en appliquant sur ∇u_n et $\nabla \overline{u}$ les inégalité dues à la convexité de la fonction $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \xi \to |\xi|^p$ on obtient que

$$|\nabla u_n|^p \geq |\nabla \overline{u}|^p + \langle \nabla g(\nabla \overline{u}), \nabla u_n - \nabla \overline{u} \rangle \quad \text{où} \quad \Big(\nabla g(\xi)\Big)_i = |\xi|^{p-2}\,\xi_i. \tag{3.8}$$

On remarque que $\nabla g(\nabla \overline{u}) \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ où comme d'habitude $p' = \frac{p}{p-1}$. En effet on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla g(\nabla \overline{u})|^{p'}\, dx &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |\nabla \overline{u}|^{2(p-2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2(p-1)}} dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^{2(p-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2(p-1)}} dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^{2(p-1)} \right)^{\frac{p}{2(p-1)}} \ dx = \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^p \ dx < \infty
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient du fait que $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi grâce à l'inégalité de Hölder on obtient $\langle \nabla g(\nabla \overline{u}), \nabla u_n - \nabla \overline{u} \rangle \in L^1(\Omega)$ et $f(u_n - u) \in L^1(\Omega)$. Ainsi on obtient de l'équation (3.8)

$$\frac{1}{p} |\nabla u_n|^p - f u_n \geq \frac{1}{p} |\nabla \overline{u}|^p - f \overline{u} + \frac{1}{p} \langle \nabla g(\nabla \overline{u}), \nabla u_n - \nabla \overline{u} \rangle + f(\overline{u} - u_n),$$

ce qui implique lorsque l'on intègre sur Ω :

$$I(u_n) \geq I(\overline{u}) + \frac{1}{p} \int_\Omega \langle \nabla g(\nabla \overline{u}), \nabla u_n - \nabla \overline{u} \rangle \ dx + \int_\Omega f(\overline{u} - u_n) \ dx. \tag{3.9}$$

Néanmoins, puisque $u_n \rightharpoonup \overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ dans L^p et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla \overline{u}$ dans L^p, on déduit par la définition de la convergence faible dans L^p que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle \nabla g(\nabla \overline{u}), \nabla u_n - \nabla \overline{u} \rangle \ dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(\overline{u} - u_n) \ dx = 0.$$

En revenant à (3.9), on peut à présent affirmer

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u})$$

Existence : conclusion On combine les deux étapes. Puisque u_n est une suite minimisante c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = m = \inf I(u)$$

et pour une telle suite on a la semicontinuité inférieure, c'est-à-dire

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u}),$$

on en déduit

$$m = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(\overline{u}) \geq m,$$

montrant ainsi que $\overline{u}$ est un minimiseur de l'équation (P).

Unicité Cette preuve ressemble à celle présentée lors du cas où $p = 2$. On suppose qu'il existe deux fonctions $\overline{u}, \overline{v} \in u_0 + W_0^{1,p}$ telles que

$$I(\overline{u}) = I(\overline{v}) = m,$$

et on prouve que cela implique $\overline{u} = \overline{v}$. On pose

$$\overline{w} = \frac{\overline{u} + \overline{v}}{2}$$

et on remarque que $w \in u_0 + W_0^{1,p}$. Puisque la fonction $\xi \to |\xi|^p$ est convexe, on peut prétendre que $\overline{w}$ est aussi un minimiseur puisque

$$\begin{aligned} m \leq I(w) &= \int_\Omega \frac{1}{p}\left|\frac{\nabla\overline{u} + \nabla\overline{v}}{2}\right|^p - \frac{fu}{2} - \frac{fv}{2}\; dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{2p}|\nabla\overline{u}|^p - \frac{fu}{2} + \frac{1}{2p}|\nabla\overline{v}|^p - \frac{fv}{2}\; dx = \frac{I(\overline{u})}{2} + \frac{I(\overline{v})}{2} = m. \end{aligned}$$

On obtient conséquemment

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\overline{u}|^p}{2} + \frac{|\nabla\overline{v}|^p}{2} - \left|\frac{\nabla\overline{u} + \nabla\overline{v}}{2}\right|^p dx = 0.$$

Ainsi en utilisant à nouveau la convexité de $\xi \to |\xi|^p$ on obtient que l'intégrant est positif tandis que l'intégrale est nulle. Par conséquent, nous avons

$$\frac{|\nabla\overline{u}|^p}{2} + \frac{|\nabla\overline{v}|^p}{2} - \left|\frac{\nabla\overline{u} + \nabla\overline{v}}{2}\right|^p = 0 \quad p.p.,$$

et en raison de la convexité stricte de $\xi \to |\xi|^p$, cela implique que $\nabla\overline{u} = \nabla\overline{v}$ presque partout et donc $\overline{u} = \overline{v}$ presque partout puisque $\overline{u} - \overline{v}$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$. En se rappelant que l'on considère deux fonctions égales presque partout comme la même fonction, on obtient effectivement l'unicité du minimiseur. □

Nous montrons à présent que le minimiseur $\overline{u}$ respecte l'équation d'*Euler-Lagrange* associé au problème (P).

Théorème 3.7 (Équation d'Euler-Lagrange)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec un bord Lipschitz, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$ et $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ est un minimiseur de*

$$(P) \qquad \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,p}} \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p - fu \, dx \right\} = m.$$

alors $\overline{u}$ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange, i.e

$$(E_w) \qquad \int_\Omega \langle |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u}, \nabla \varphi \rangle + f\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Réciproquement si $\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfait l'équation (E_w), c'est une minimiseur de (P).

Remarque 3.8. Si on demande à la fonction $\overline{u}$ d'être plus régulière, par exemple $u_0 + W_0^{2,p}(\Omega)$ alors une intégration par partie de l'équation (E_w) nous donnerait

$$\int_\Omega [\operatorname{div}(|\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u}) + f]\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En invoquant le lemme fondamental du calculs des variations, on peut alors affirmer que $\overline{u}$ est une solution faible du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Big(|\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u}\Big) = -f & \text{presque partout dans } \Omega \\ \overline{u} = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. On remarque que $\overline{u} + \varepsilon\varphi \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Par conséquent, puisque que $\overline{u}$ est un minimiseur de (P), on a par conséquent

$$I(\overline{u}) \leq I(\overline{u} + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla \overline{u} + \varepsilon \nabla \varphi|^p - f(\overline{u} + \varepsilon\varphi) dx.$$

On pose $g(x, \varepsilon) = \frac{1}{p} |\nabla \overline{u}(x) + \varepsilon \nabla \varphi(x)|^p - f(x)\Big(\overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x)\Big)$. On se souvient que l'on note $g_\varepsilon(x, \varepsilon)$ la dérivée partielle de g par rapport à ε. On remarque alors

i) La fonction $x \to g(x, 0) = |\nabla \overline{u}|^p - f\overline{u} \in L^1(\Omega)$, car $\overline{u} \in L^p(\Omega)$ et $p > 1$, et $f\overline{u} \in L^1(\Omega)$ par l'inégalité de Hölder. On procède de même pour montrer que la fonction $x \to g(x, \varepsilon) \in L^1(\Omega)$.

ii) De plus par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$g(x, \varepsilon) - g(x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(g(x, t\varepsilon)\Big) dt = \varepsilon \int_0^1 g_\varepsilon(x, t\varepsilon) dt$$

où

$$g_\varepsilon(x, t\varepsilon) = |\nabla \overline{u}(x) + t\varepsilon \nabla \varphi(x)|^{p-2} \langle \nabla \overline{u}(x) + t\varepsilon \nabla \varphi(x), \nabla \varphi(x) \rangle - f(x)\varphi(x).$$

Par ailleurs nous avons grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$g_\varepsilon(x, t\varepsilon) \leq |\nabla \overline{u}(x) + t\varepsilon \nabla \varphi(x)|^{p-1} |\nabla \varphi(x)| - f(x)\varphi(x).$$

De plus on note que

$$\begin{aligned}|\nabla\overline{u}(x)+t\varepsilon\nabla\varphi(x)|^{p-1} &\leq \left(2\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_{x_i}^2(x)+(t\varepsilon)^2\varphi_{x_i}^2(x)\right)^{\frac{p-1}{2}}\\ &\leq 2^{\frac{p-1}{2}}\left(|\nabla\overline{u}(x)|^{p-1}+(t\varepsilon)^{p-1}|\nabla\varphi(x)|^{p-1}\right)\end{aligned}$$

Ainsi en supposant $\varepsilon \leq 1$ (et donc $(t\varepsilon)^{p-1} < 1$), on peut alors affirmer que

$$\left|\frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}\right| \leq G(x) \in L^1(\Omega)$$

où

$$G(x) = 2^{\frac{p-1}{2}}(|\nabla\overline{u}(x)|^{p-1}|\nabla\varphi|+|\nabla\varphi(x)|^p)-f(x)\varphi(x) \in L^1(\Omega).$$

iii) Par ailleurs on a

$$\left|\frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}\right| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x,0) = \langle|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u},\nabla\varphi\rangle - f\varphi \ \textit{p.p. dans } \Omega.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{d\varepsilon}I(\overline{u}+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\overline{u}+\varepsilon\varphi)-I(\overline{u})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}dx\\ &= \int_\Omega\langle|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u},\nabla\varphi\rangle - f\varphi\ dx.\end{aligned}$$

Réciproque Si $\overline{u}$ est une solution de (E_w) dans $u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ et si $u \in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $u-\overline{u}$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$. En utilisant la convexité de $|\cdot|^p$, on peut affirmer

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_\Omega\langle|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u},\nabla(u-\overline{u})\rangle - f(u-\overline{u})dx = I(\overline{u}),$$

montrant ainsi que $\overline{u}$ est un minimiseur de (P'). □

Chapitre 4

Régularité

Le but de ce chapitre sera de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$, et $f \in L^2(\Omega)$ tels que u satisfait l'équation*

$$(E_w) \quad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, dx \; , \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

alors

$$u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

De plus, u respecte l'équation

$$(E_w)' \qquad \Delta u = -f \quad p.p. \ dans \ \Omega.$$

En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent que si $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ est une solution de l'équation (E_w) si et seulement s'il minimise également le problème

$$(P) \qquad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - fu \, dx : u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) \right\}.$$

Par conséquent, le minimiseur $\overline{u}$ que nous trouvons au problème (P) est donc $W^{2,2}(\Omega)$.

Pour la démonstration, nous utiliserons la méthode du quotient différentiel, que nous définissons tout de suite, et dont nous énoncerons quelques propriétés avant de nous lancer dans la preuve du théorème 4.1.

Définition 4.2. Soit $\tau \in \mathbb{R}^n$ et τ non nul. Le *quotient différentiel* est défini par

$$(D_\tau u)(x) = \frac{u(x+\tau) - u(x)}{|\tau|}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on remarque qu'il y a un lien entre la différentiabilité et l'existence d'une limite pour le quotient différentiel lorsque τ tend vers 0. C'est pourquoi nous énonçons le théorème suivant qui expose certains liens entre les fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ et le quotient différentiel dans le cas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Notons que nous utiliserons énormément ce théorème.

Théorème 4.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 < p \leq \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) *Il existe une constante* $\gamma = \gamma(u, \Omega, p)$ *de sorte que*

$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq \gamma \|\varphi\|_{L^{p'}}, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

où $1/p + 1/p' = 1$.

(iii) *Il existe une constante* $\gamma = \gamma(u, \Omega, p)$ *de sorte que que pour tout ouvert* $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ *avec* $\overline{\omega}$ *compact, et pour tout* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *non nul, tel que* $|\tau| < dist(\omega, \Omega^c)$ *où* Ω^c *est l'ensemble complémentaire de* Ω*, alors*

$$\|D_\tau u\|_{L^p(\omega)} \leq \gamma.$$

De plus si l'on a (ii) *ou* (iii)*, alors*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma.$$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *alors la constante* γ *dans* (ii) *ou* (iii) *peut être prise par* $\|\nabla u\|_{L^p}$ *et en particulier*

$$\|D_\tau u\|_{L^p(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. On trouvera une preuve détaillée dans le théorème 5.8.3 et 5.8.4 dans l'Evans [4]. □

Les résultats suivants seront également bien utile pour la démonstration de la régularité intérieure.

Lemme 4.4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert quelconque,* $\varepsilon > 0$ *et* $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$*. Nous avons alors l'inégalité suivante*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Nous allons montrer que

$$ab \leq a^2 + b^2. \tag{4.1}$$

Si a ou b est nul alors l'inégalité est triviale. Supposons tout d'abord que $ab > 0$. Nous avons alors

$$a^2 - ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0.$$

Si $ab < 0$, nous avons trivialement

$$a^2 - ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \geq 0.$$

Par conséquent nous obtenons l'inégalité (4.1). Ainsi en appliquant l'inégalité $a = |\sqrt{\varepsilon} u|$ et $b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |v|$, nous obtenons

$$\|uv\|_{L^1} = \int_\Omega |uv| \, dx \leq \int_\Omega \varepsilon |u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |v|^2 \, dx = \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|_{L^2}^2.$$

□

Lemme 4.5. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*. Nous avons alors les propriétés suivantes.*

(i) $\nabla(D_\tau u) = D_\tau(\nabla u)$.

(ii) *Si de plus* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *alors pour tout* τ *non nul, tel que* $\tau < dist(supp\ v, \Omega^c)$*, nous avons*

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla D_{-\tau} v\rangle \, dx = \int_\Omega \langle D_\tau \nabla u, \nabla v\rangle \, dx.$$

Démonstration. Pour la partie (i), nous avons trivialement

$$\nabla(D_\tau u)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u(x+\tau)-u(x)}{|\tau|}\right) = \frac{1}{|\tau|}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+\tau) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = D_\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Ensuite, afin de montrer la dernière affirmation, nous posons tout d'abord $\omega = \operatorname{supp} v$. Nous avons ensuite pour chaque $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{x_i}(x) D_{-\tau}(v_{x_i}(x)) \, dx &= \int_\Omega u_{x_i}(x)\frac{v_{x_i}(x-\tau)}{|\tau|}dx - \int_\omega u_{x_i}(x)\frac{v_{x_i}(x)}{|\tau|}dx \\
&= \int_{\omega+\tau} u_{x_i}(x)\frac{v_{x_i}(x-\tau)}{|\tau|}dx - \int_\omega u_{x_i}(x)\frac{v_{x_i}(x)}{|\tau|}dx \\
&= \int_\omega \frac{u_{x_i}(x+\tau)}{|\tau|}v_{x_i}(x)dx - \int_\omega \frac{u_{x_i}(x)}{|\tau|}v_{x_i}(x)dx \\
&= \int_\Omega D_{-\tau}(u_{x_i}(x))v_{x_i}(x)dx.
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à sommer la dernière expression par rapport aux i et utiliser le point (i) pour obtenir le résultat désiré. □

Lemme 4.6. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert avec un bord de classe Lipschitz,* $u \in W^{1,2}(\Omega)$*, et* $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$*. Si* $0 \neq |\tau| < dist(supp\ \rho, \Omega^c)$ *alors la fonction* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi = D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u),$$

appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Démonstration. On remarque que cela revient à montrer que $\rho^2 u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, du fait que l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est un espace vectoriel. C'est-à-dire qu'il faut montrer qu'il existe des dérivées faibles de $\rho^2 u$ et qu'en plus, ces dérivées appartiennent à $L^2(\Omega)$. On peut montrer ce résultat en utilisant la densité des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$.

□

Nous sommes ainsi prêts à démontrer le théorème de régularité pour l'intégrale de Dirichlet. Nous aimerions donc montrer que si $u \in W^{1,2}(\Omega)$, et $f \in L^2(\Omega)$ tel que u satisfasse l'équation

$$(E_w) \qquad \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \ , \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

alors

$$u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

De plus, u respecte l'équation

$$(E_w)' \qquad \Delta u = -f \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

La démonstration se fera de la manière suivante :

(i) Nous allons fixer un sous-ensemble ouvert de Ω dont la fermeture est compact dans Ω. Puis nous allons choisir φ dans (E_w) particulier. Nous ferons alors quelques calculs.

(ii) Nous devrons alors borner certaines expressions.

(iii) Nous aimerions trouver à la fin une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\|u\|_{W^{2,2}(O)} \leq \gamma(\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

ce qui montrera que $u \in W^{2,2}(O)$, pour tout $O \subset \Omega$ compact dans Ω, puisque le O de départ était quelconque.

(iv) Nous intégrerons par partie l'équation (E_w) et invoqueront le lemme fondamental du calcul des variations pour obtenir $(E_w)'$.

Preuve du théorème 4.1. Soit $O \subset \overline{O} \subset \Omega$ un ouvert fixé tel que $\overline{O}$ soit compact. Soit de plus $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho \equiv 1 \text{ dans } O.$$

Posons supp $\rho = \omega \subset \Omega$. Nous allons choisir un $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ particulier dans l'équation (E_w). En effet, pour un $|\tau|$ suffisamment petit, nous posons

$$\varphi = D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u).$$

Par le lemme 4.6, la fonction φ ainsi définie est alors bien $W_0^{1,2}(\Omega)$. L'équation (E_w) devient ainsi

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u)\rangle \, dx = \int_\Omega f D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u) \, dx.$$

En invoquant les propriétés du quotient différentiel en particulier les résultats aux lemmes 4.5 et 4.6, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u) \, dx &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u)\rangle \, dx \\
&= 2\int_\Omega \langle \nabla u, D_{-\tau}\rho \nabla\rho(D_\tau u)\rangle dx + \int_\Omega \langle \nabla u, D_{-\tau}\rho^2(D_\tau \nabla u)\rangle \, dx \\
&= 2\int_\Omega \langle \rho(D_\tau \nabla u), \nabla\rho(D_\tau u)\rangle dx + \int_\Omega \rho^2 \langle D_\tau \nabla u, D_\tau \nabla u\rangle \, dx \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Estimations Nous allons à présent faire des estimations en utilisant chacun des termes de l'équation précédente, en d'autres termes, nous allons montrer les inégalités suivantes :

(i) $\|\rho(D_\tau \nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \rho^2 \langle D_\tau \nabla u, D_\tau \nabla u\rangle \, dx.$

(ii) Pour un $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\left|2\int_\Omega \langle \rho(D_\tau \nabla u), \nabla\rho(D_\tau u)\rangle dx\right| \leq 2\varepsilon \|\rho(D_\tau \nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\varepsilon}\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité suivante se tient :

$$\left|\int_\Omega f D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u) \, dx\right| \leq 2\varepsilon \|\rho(D_\tau \nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} + 8\varepsilon \|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

A moins que cela ne soit précisé autrement, nous noterons par $\|\cdot\|_{L^p}$ la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$t.

Estimation (i). La première estimation est triviale, car par définition de la norme $L^2(\Omega)$ nous avons donc par définition

$$\begin{aligned}\|\rho(D_\tau \nabla u)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\rho(D_\tau \nabla u)|^2\,dx = \int_\Omega |\rho(D_\tau \nabla u)|^2\,dx = \int_\Omega \rho^2\,|D_\tau \nabla u|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \rho^2 \langle D_\tau \nabla u, D_\tau \nabla u\rangle dx.\end{aligned}$$

Estimation (ii). On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\left|2\int_\Omega \langle \rho(D_\tau \nabla u), \nabla \rho(D_\tau u)\rangle dx\right| \le 2\int_\Omega |\rho(D_\tau \nabla u)|\,|\nabla \rho(D_\tau u)|\,dx.$$

On déduit alors à partir du lemme 4.4 et à partir du fait que $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ (impliquant que $\nabla\rho \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$) que

$$2\int_\Omega |\rho(D_\tau \nabla u)|\,|\nabla \rho(D_\tau u)|\ \ dx \le\ 2\varepsilon\,\|\rho(D_\tau \nabla u)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\,\|\nabla \rho(D_\tau u)\|_{L^2}^2\,.$$

En se rappelant que supp $v = \omega$, et en utilisant le point (iii) du théorème 4.3, on observe par ailleurs que

$$\|\nabla \rho(D_\tau u)\|_{L^2}^2 = \int\limits_\omega |\nabla \rho(D_\tau u)|^2\,dx \le \|\nabla\rho\|_{L^\infty}^2 \int\limits_\omega |D_\tau u|^2\,dx \le \|\nabla\rho\|_{L^\infty}^2\,\|\nabla u\|_{L^2}^2\,. \tag{4.3}$$

On obtient finalement l'estimation désirée

$$\left|2\int_\Omega \langle \rho(D_\tau \nabla u), \nabla \rho(D_\tau u)\rangle dx\right| \le 2\varepsilon\,\|\rho(D_\tau \nabla u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\,\|\nabla\rho\|_{L^\infty}^2\,\|\nabla u\|_{L^2}^2\,.$$

Estimation (iii). En utilisant à nouveau le point (iii) du théorème 4.3, et le lemme 4.4 et le fait que pour un $\varepsilon > 0$ fixé, nous avons

$$\left|\int_\Omega f D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u)\ dx\right| \le \varepsilon\left\|D_{-\tau}\rho^2(D_\tau u)\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|f\|_{L^2}^2 \le \varepsilon\left\|\nabla\left(\rho^2(D_\tau u)\right)\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|f\|_{L^2}^2\,.$$

De plus on obtient en utilisant la convexité de $\xi \to |\xi|^2$ que

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\rho^2(D_\tau u)\right\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left|2\rho\nabla\rho(D_\tau u) + \rho^2(D_\tau \nabla u)\right|^2 dx \\ &\le 2\int_\Omega |2\rho\nabla\rho(D_\tau u)|^2\,dx + 2\int_\Omega \left|\rho^2(D_\tau \nabla u)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

De plus puique $0 \le \rho \le 1$ et donc $\rho^2 \le \rho$ nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\rho^2(D_\tau u)\right)\right\|_{L^2}^2 &\le 8\int_\Omega |\nabla\rho(D_\tau u)|^2\,dx + 2\int_\Omega |\rho(D_\tau \nabla u)|^2\,dx \\ &= 8\,\|\nabla\rho(D_\tau u)\|_{L^2}^2 + 2\,\|\rho(D_\tau \nabla u)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

En combinant le résultat de l'équation précédente et de l'équation (4.3), nous déduisons finalement que

$$\left|\int_\Omega f D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u)\ dx\right| \le 8\varepsilon\,\|\nabla\rho\|_{L^\infty}^2\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon\,\|\rho(D_\tau \nabla u)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|f\|_{L^2}^2\,.$$

Synthèse des estimations Si nous combinons les estimations (ii) et (iii), nous obtenons alors que l'expression

$$\left|2\int_{\Omega}\langle\rho(D_\tau\nabla u),\nabla\rho(D_\tau u)\rangle dx\right|+\left|\int_{\Omega}fD_{-\tau}(\rho^2D_\tau u)dx\right|$$

est bornée par

$$4\varepsilon\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2}^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+8\varepsilon\right)\left\|\nabla\rho\right\|_{L^\infty}^2\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|f\right\|_{L^2}^2.$$

Rappelons que l'équation $\varphi = D_{-\tau}(\rho^2 D_\tau u)$ satisfait l'équation (4.2) qui s'écrit également

$$\int_{\Omega}\rho^2\langle D_\tau\nabla u,D_\tau\nabla u\rangle\,dx=\int_{\Omega}fD_{-\tau}(\rho^2D_\tau u)\,dx-2\int_{\Omega}\langle\rho(D_\tau\nabla u),\nabla\rho(D_\tau u)\rangle dx$$

En prenant les valeurs absolues et en appliquant l'inégalité triangulaire nous obtenons grâce et au calcul précédent

$$\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2}^2\leq 4\varepsilon\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2}^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+8\varepsilon\right)\left\|\nabla\rho\right\|_{L^\infty}^2\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|f\right\|_{L^2}^2,$$

qui s'écrit également

$$(1-4\varepsilon)\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2}^2\leq\left(\frac{2}{\varepsilon}+8\varepsilon\right)\left\|\nabla\rho\right\|_{L^\infty}^2\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|f\right\|_{L^2}^2.$$

Conclusion Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, nous pouvons trouver $\gamma = \gamma(\varepsilon, \rho) > 0$ tel que

$$\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2}^2\leq\gamma\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|f\right\|_{L^2}^2\right).$$

En utilisant la définition de ρ on peut écrire

$$\left\|D_\tau\nabla u\right\|_{L^2(O)}^2\leq\left\|\rho(D_\tau\nabla u)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\gamma\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

Par le point (iii) du lemme 4.3 nous déduisons

$$\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2(O)}^2\leq\gamma\left(\left\|\nabla u\right\|_{W1,2(\Omega)}^2+\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right),$$

impliquant ainsi que $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, puisque nous avons

$$\left\|\nabla^2u\right\|_{W^{2,2}(O)}^2\leq(\gamma+1)\left(\left\|\nabla u\right\|_{W1,2(\Omega)}^2+\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right),$$

achevant ainsi la démonstration de la régularité intérieur de u.

Pour déterminer l'équation $(E_w)'$, nous allons intégrer par partie l'équation (E_w). En effet soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. La raison pour laquelle nous sommes autorisés à intégrer par partie l'équation (E_w) est que comme nous venons de le montrer, $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, et en particulier $u \in W^{2,2}(\omega)$, ou $\omega = \mathrm{supp}\ \varphi$ qui est un compact de Ω Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi \, dx = \int_\omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}\varphi_{x_i} \, dx - \int_\omega f(x)\varphi(x) \, dx \\ &= \int_\omega - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\varphi - f\varphi \, dx = -\int_\Omega (\Delta u + f)\, \varphi \ dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Nous pouvons finalement appliquer le lemme fondamental du calcul des variations pour conclure

$$\Delta u = -f \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

□

Bibliographie

[1] DACOROGNA Bernard, *Introduction to the calculus of variations*, Imperial College Press, 2009.

[2] BREZIS Haïm, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, 1999.

[3] RENARDY Michael, C.Rogers Robert, *An introduction to Partial Differential Equations*, Second Edition, Springer, 2004.

[4] EVANS Lawrence, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[5] JOST Jürgen, *Postmodern Analysis*, Third Edition, Springer, 2005.